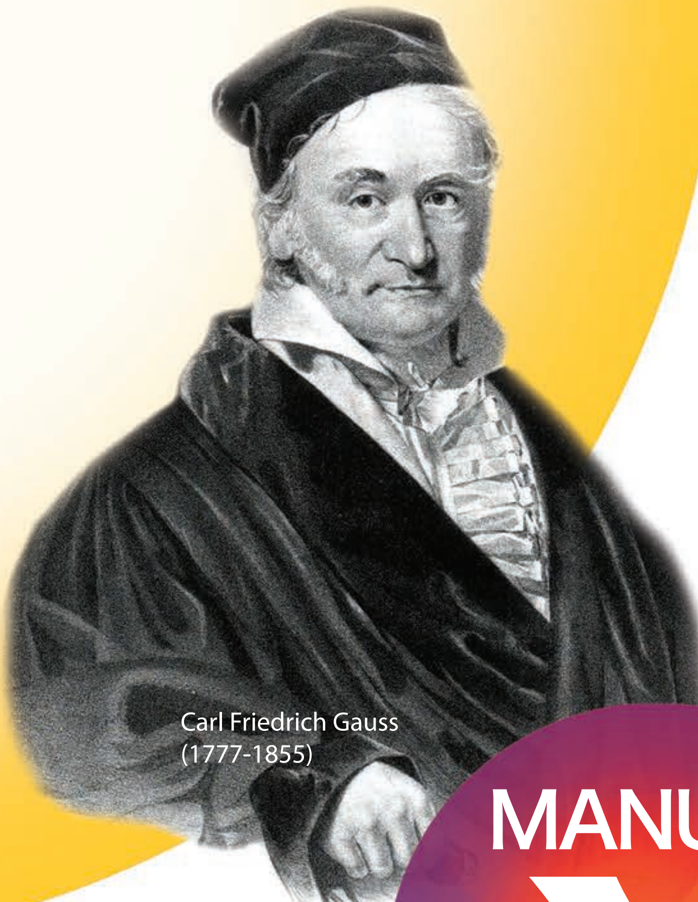
MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion ACHIRI Petru EFROS Valentin GARIT Nicolae PRODAN

MATEMATICĂ



Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

MANUAL PENTRU CLASA X

PRUT INTERNAȚIONAL

MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion ACHIRI Petru EFROS Valentin GARIT Nicolae PRODAN

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA X

PRUT INTERNAȚIONAL

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova nr. 357 din 11 mai 2012.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul .... Manualul nr.				
Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului care a primit manualul	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Profesorii vor controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu trebuie să facă nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Comisia de evaluare:
Dorin Afanas, doctor, conferențiar universitar, UST
Ana Gangan, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „G. Călinescu”, Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Autori:
Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, IŞE (Modulele 4, 6, 7)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 9)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 9)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 1, 2, 3, 5, 7)

Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Aliona Zgardan*
Coperta: *Sergiu Stanciu, Adrian Grosu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 83, Chişinău, MD 2071
Tel.: 75 18 74; tel./fax: 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro

Difuzare: Societatea de Distribuție a Cărții *PRO NOI*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: 51 68 17, 51 57 49; www.pronoi.md; e-mail: info@pronoi.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 7329

CZU 51(075.3)
M 47

ISBN 978-9975-54-043-8

Cuvînt-înainte

Prezentul manual este elaborat în conformitate cu curriculumul modernizat la matematică pentru liceu. Structura şi baza conceptuală ale manualului dau posibilitatea să fie realizate prevederile curriculumului liceal pentru clasa a X-a.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sînt formulate obiectivele prioritare care pot fi realizate studiind modulul în cauză. Obiectivele marcate cu * sînt preconizate doar pentru profilul real. Menţionăm că manualul include compartimente ce ţin de algebră, geometrie, logică matematică, combinatorică, teoria mulţimilor, trigonometrie.

Acest manual permite realizarea principiilor constructiv şi formativ, pe care se axează învăţămîntul matematic. În acest scop, s-a acordat o atenţie deosebită atît corelării conceptelor (noţiunilor) din diverse compartimente, cît şi revenirii sistematice la acelaşi concept, dezvăluindu-i diferite aspecte. Pentru înţelegerea şi conştientizarea conceptelor sînt propuse exemple motivaţionale, exemple de utilizare a acestora în alte domenii, inclusiv în viaţa cotidiană. În acelaşi scop, la finalul fiecărui modul sînt oferite hărţi noţionale (tabele de sinteză), cu ajutorul cărora se va realiza o sistematizare a celor studiate, se vor elucida legăturile principale dintre concepte sau dintre diferite componente ale aceluiaşi concept.

Manualul este astfel structurat, încît să poată fi utilizat la predarea matematicii atît la profilul real, cît şi la cel umanistic. De reţinut că **materialul (textul) marcat în partea stîngă cu o bară verticală este prevăzut pentru profilul real. Pentru profilul umanistic, aceste texte sînt propuse ca extinderi**. În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exerciţiile şi problemele propuse la sfîrşitul fiecărui paragraf (eventual, pentru unele secvenţe), precum şi la sfîrşitul fiecărui modul, sînt clasificate pe două niveluri: **A** şi **B**. Exerciţiile notate cu litera **A** sînt destinate elevilor de la ambele profiluri, iar cele notate cu **B** sînt destinate elevilor de la profilul real. Menţionăm că exerciţiile marcate cu * sînt de un grad sporit de complexitate şi nu sînt obligatorii pentru profilul respectiv.

Probele de evaluare sînt elaborate pe profiluri: **A** – profilul umanistic, arte şi sport; **B** – profilul real.

Unele prevederi sînt destinate să faciliteze organizarea lucrului de sine stătător al elevilor. Sistemele de exemple motivaţionale, de consolidare şi de utilizare a conceptelor sînt menite să ajute elevul să înţeleagă aceste concepte, să-şi însuşească atît conceptele noi, cît şi unele aspecte ale conceptelor deja cunoscute (de exemplu, monotonia şi extremele funcţiei, ecuaţii şi inecuaţii de noi tipuri ş.a.). Recomandăm, în scopul formării competenţelor respective, să se insiste asupra examinării şi rezolvării exemplelor, exerciţiilor propuse în manual. Exerciţiile şi problemele recapitulative la fiecare modul prezintă, de regulă, un nivel mai avansat de integrare intra- şi interdisciplinară. Rezolvarea acestora, de asemenea, va contribui eficient la formarea competenţelor specifice la matematică.

Manualul le oferă elevilor pasionaţi de matematică posibilităţi pentru a-şi extinde cunoştinţele, atît prin unele noţiuni teoretice suplimentare, cît şi prin probleme mai complicate.

Autorii

MODULUL 1 Numere reale. Recapitulare și completări

Numerele guvernează lumea.
Pitagora

Obiective

- recunoașterea elementelor mulțimilor numerice studiate $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ și scrierea numerelor reale sub diverse forme;
- utilizarea terminologiei aferente noțiunii de număr;
- trecerea de la o formă de scriere a numerelor reale la alta;
- reprezentarea geometrică a numerelor reale;
- efectuarea operațiilor studiate cu numere reale;
- aplicarea proprietăților operațiilor cu numere reale pentru simplificarea calculelor;
- compararea numerelor reale prin metode diverse;
- aproximarea prin lipsă sau prin adaos a numerelor reale cu eroarea dată;
- utilizarea modulului numărului real în contexte variate.

§1 Numere raționale, iraționale, reale

Amintim că prin K^*, K_+, K_- se notează, respectiv, mulțimea numerelor nenule, mulțimea numerelor pozitive, mulțimea numerelor negative din mulțimea numerică K.

Menționăm că numerele raționale pot fi scrise sub formă de numere zecimale, și invers.

Exemple

a) $\frac{23}{1000}=0{,}023;$ b) $\frac{1}{3}=0{,}33...=0,(3);$ c) $\frac{1046}{495}=2{,}1(13);$

d) $0{,}023=\frac{23}{1000};$ e) $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};$

f) $2{,}1(13)=2+0{,}1(13)=2+\frac{113-1}{990}=2+\frac{112}{990}=2+\frac{56}{495}=\frac{1046}{495}.$

Mulțimile numerice $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ permit rezolvarea unui șir de probleme. Există însă situații care nu pot fi depășite utilizînd doar aceste mulțimi numerice.

Problemă. Să se determine lungimea diagonalei unui dreptunghi cu laturile de lungimile 1 și 2.

Rezolvare:

Fie a lungimea diagonalei dreptunghiului. Atunci, conform teoremei lui Pitagora, $a^2=1^2+2^2=5$. Încercăm să rezolvăm problema în mulțimea numerelor raționale. Fie

$a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ o fracție ireductibilă. Atunci $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5,$ de unde rezultă că $m^2 = 5n^2$ şi $m^2 \vdots 5,$ adică $m \vdots 5$ şi $m = 5t,\ t \in \mathbb{N}$. După substituție în $m^2 = 5n^2$, obținem $25t^2 = 5n^2 \Leftrightarrow 5t^2 = n^2,$ adică $n \vdots 5,$ de unde rezultă că fracția $\frac{m}{n}$ este reductibilă cu 5, contrar presupunerii. Contradicția obținută demonstrează că problema formulată nu are soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$.

Astfel, lungimea diagonalei trebuie să fie un număr (nerațional) al cărui pătrat este 5, deci care poate fi scris sub forma $\sqrt{5}$.

Pentru a scrie numărul $\sqrt{5}$ ca număr zecimal, vom calcula valorile lui aproximative folosind *aproximările zecimale prin lipsă* şi *aproximările zecimale prin adaos*. Deoarece $2^2 < 5 < 3^2$, rezultă că $2 < \sqrt{5} < 3$. Numerele 2 şi 3 sînt aproximările zecimale prin lipsă şi respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decît 1 (sau cu o unitate), ale numărului $\sqrt{5}$. Divizăm intervalul [2, 3] în 10 părți egale şi alegem numerele 2,2 şi 2,3, care satisfac inegalitatea dublă $(2{,}2)^2 < 5 < (2{,}3)^2$. Numerele 2,2 şi 2,3 sînt aproximările zecimale prin lipsă şi respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-1} (sau cu o zecime), ale numărului $\sqrt{5}$. În mod analog se determină aproximările zecimale 2,23 şi 2,24 prin lipsă şi respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-2} (sau cu o sutime), ale numărului $\sqrt{5}$. Acest procedeu poate fi continuat la infinit, deoarece pătratul nici unuia din numerele obținute nu va fi egal cu 5. (S-a demonstrat că $\sqrt{5}$ nu este număr rațional.) Numărul zecimal obținut 2,23... are un număr infinit de zecimale şi nu este (din acelaşi motiv) nici număr zecimal periodic. Cunoaştem că astfel de numere, care pot fi reprezentate ca numere zecimale neperiodice cu un număr infinit de zecimale, se numesc ***numere iraționale***. De exemplu, numerele $\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ \pi = 3{,}1415...$ (π este valoarea raportului dintre lungimea cercului şi diametrul lui) sînt numere iraționale.

În caz general, numerele zecimale α_n şi α_n' cu n cifre după virgulă se numesc ***aproximări zecimale prin lipsă*** şi respectiv ***aproximări zecimale prin adaos***, cu o eroare mai mică decît 10^{-n}, ale numărului irațional α, dacă: 1) $\alpha_n < \alpha < \alpha_n'$ şi 2) $\alpha_n' - \alpha_n = 10^{-n},\ n \in \mathbb{N}$. Astfel, *fiecărui număr irațional α i se asociază două şiruri infinite de numere zecimale raționale* $(\alpha_n)_{n\geq 0},\ (\alpha_n')_{n\geq 0},\ n \in \mathbb{N}$, care satisfac proprietățile 1), 2).

Pentru comoditate şi uniformitate, convenim să examinăm şi şiruri similare de aproximări zecimale ale numărului rațional α, considerînd că $\alpha_n = \alpha_n' = \alpha$, începînd cu un oarecare indice n_k. De exemplu, pentru $\alpha = 2{,}719$, elementele acestor şiruri sînt: $\alpha_0 = 2,\ \alpha_0' = 3;\ \alpha_1 = 2{,}7,\ \alpha_1' = 2{,}8;\ \alpha_2 = 2{,}71,\ \alpha_2' = 2{,}72;\ \alpha_3 = 2{,}719 = \alpha_3' = \alpha_4 = \alpha_4' = \ldots = \alpha_n = \alpha_n' = \alpha\ (n_k = 3)$.

Aceste şiruri se folosesc pentru a defini operații cu numere reale.

Ne amintim că reuniunea mulțimii numerelor raționale ($\mathbb{Q}$) cu mulțimea numerelor iraționale ($\mathbf{I}$) formează ***mulțimea numerelor reale***, care se notează cu $\mathbb{R}$. Prin urmare, $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor care pot fi scrise ca numere zecimale cu un număr finit de zecimale, ca numere zecimale periodice sau ca numere zecimale neperiodice cu un număr infinit de zecimale.

Între mulțimile numerice studiate au loc relațiile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R};\ \mathbf{I} \subset \mathbb{R};\ \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$.

§2 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor. Compararea numerelor reale

Se ştie că oricărui număr real a îi corespunde un unic punct M pe axa numerelor Ox, astfel încît $OM = |a|$, şi invers. Dacă $a > 0$, atunci punctul M aparține semiaxei pozitive; dacă $a < 0$, atunci M aparține semiaxei negative, iar dacă $a = 0$, atunci M coincide cu punctul O. Numărul a se numeşte ***coordonata*** punctului M. Folosind această corespondență, numerele reale pot fi reprezentate geometric.

În funcție de forma sub care sînt scrise numerele reale, se aplică diferite *modalități de comparare* a acestora.

1. Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, este mai mare numărul situat la dreapta (spre sensul pozitiv) celuilalt. De exemplu, $x_2 > x_1$ (fig. 1.1).

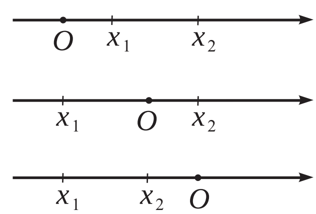


Fig. 1.1

2. Dacă numerele reale pozitive sînt scrise sub formă zecimală, atunci este mai mare numărul care are mai multe cifre pînă la virgulă.

De exemplu, $11{,}13 > 9{,}99$.

3. Dacă numerele reale pozitive au acelaşi număr de cifre pînă la virgulă, atunci este mai mare numărul cu prima cifră (începînd din stînga) mai mare.

De exemplu, $2{,}173\mathbf{7}4 > 2{,}173\mathbf{2}462$, deoarece $\mathbf{7} > \mathbf{2}$.

4. Dintre două numere reale negative, este mai mare numărul al cărui modul este mai mic.

5. Dacă cel puțin unul din numerele reale a sau b este scris sub formă de expresii ce conțin radicali, atunci se pot aplica următoarele modalități:

a) se scriu ambele numere sub formă de radicali, apoi se compară numerele de sub radicali;

b) se determină semnul diferenței $a - b$;

c) se face presupunerea că $a > b$ şi apoi se utilizează proprietățile inegalităților (§ 3).

Exercițiu rezolvat

Să se compare:

a) $3\sqrt{5}$ cu $5\sqrt{3}$; b) 3 cu $6-\sqrt{5}$.

Rezolvare:

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{75}$.

Deoarece $45 < 75$, rezultă că $\sqrt{45} < \sqrt{75}$. Deci, $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

b) $3-(6-\sqrt{5}) = -3+\sqrt{5}$. Cum $-3+\sqrt{5}$ este negativ ($\sqrt{5} < 3$), obținem că $3 < 6-\sqrt{5}$.

§3 Operaţii aritmetice cu numere reale

Fie şirurile $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ şi $(\alpha'_n)_{n\geq 0}$, $(\beta'_n)_{n\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, aproximări zecimale prin lipsă şi respectiv prin adaos ale numerelor reale α şi β.

Suma numerelor reale α şi β este numărul real $\gamma=\alpha+\beta$, care satisface inegalităţile duble $\alpha_n+\beta_n\leq\gamma\leq\alpha'_n+\beta'_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Diferenţa numerelor reale α şi β este numărul real $\delta=\alpha-\beta$, care satisface inegalităţile duble $\alpha_n-\beta_n'\leq\delta\leq\alpha_n'-\beta_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Produsul numerelor reale pozitive α şi β este numărul real pozitiv $\eta=\alpha\cdot\beta$, care satisface inegalităţile duble $\alpha_n\cdot\beta_n\leq\eta\leq\alpha'_n\cdot\beta'_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Cîtul numerelor reale pozitive α şi β este numărul real pozitiv $\mu=\dfrac{\alpha}{\beta}$, care satisface inegalităţile duble $\dfrac{\alpha_n}{\beta'_n}\leq\mu\leq\dfrac{\alpha'_n}{\beta_n}$, $n\in\mathbb{N}$, începînd cu acel n pentru care aproximările zecimale β_n, β_n' sînt nenule.

Pentru a calcula produsul (cîtul) a două numere reale arbitrare, se calculează produsul (cîtul) modulelor, iar semnul rezultatului se determină în conformitate cu regula cunoscută.

Suma, diferenţa, produsul şi cîtul (cu împărţitor nenul) oricăror două numere reale există şi sînt unic determinate.

Exerciţiu rezolvat

Ce se înţelege prin numărul: a) $t=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; b) $\mu=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$?

Rezolvare:

Deoarece $1<\sqrt{2}<2$, $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, ... şi $2<\sqrt{5}<3$, $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$, $2{,}22<\sqrt{5}<2{,}23$, ..., rezultă că:

a) t este numărul care satisface inegalităţile duble:

$$1\cdot 2<t<2\cdot 3;\quad 1{,}4\cdot 2{,}2<t<1{,}5\cdot 2{,}3;\quad 1{,}41\cdot 2{,}22<t<1{,}42\cdot 2{,}23;\ \ldots$$

b) μ este numărul care satisface inegalităţile duble:

$$\frac{1}{3}<\mu<\frac{2}{2};\quad \frac{1{,}4}{2{,}3}<\mu<\frac{1{,}5}{2{,}2};\quad \frac{1{,}41}{2{,}23}<\mu<\frac{1{,}42}{2{,}22};\ \ldots$$

Folosind reprezentarea numerelor raţionale sub forma $\dfrac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$, imediat obţinem că suma, diferenţa, produsul, cîtul (cu împărţitor nenul) a două numere raţionale vor fi, de asemenea, numere raţionale. Din acest motiv, suma, diferenţa, produsul, cîtul (cu împărţitor nenul) unui număr raţional şi unui număr iraţional va fi un număr iraţional. Într-adevăr, dacă, de exemplu, în egalitatea $a+b=c$, unde a – raţional, b – iraţional, ar fi şi c – raţional, atunci din $b=c-a$ am obţine că şi b trebuie să fie raţional. Contradicţia ne confirmă cele spuse.

Dimpotrivă, suma, diferenţa, produsul, cîtul a două numere iraţionale pot fi numere raţionale.

De exemplu, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}\in\mathbf{I}$, însă $2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$, $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se demonstreze că $a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}$ este număr raţional.

Rezolvare:

$a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=(2+4\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=$
$=2\sqrt{3}+4(\sqrt{3})^2+5-2\sqrt{3}=12+5=17\in\mathbb{Q}$.

2. Să se determine dacă $a=\dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ este un număr raţional.

Rezolvare:

$$a=\frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}+2}}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3^2-2\cdot3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{|3-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Prin urmare, a nu este un număr raţional.

Observaţie. În practică, de regulă, pentru a estima suma, diferenţa, produsul sau cîtul numerelor reale, se folosesc aproximările zecimale ale numerelor reale.

Proprietăţi ale operaţiilor de adunare şi înmulţire cu numere reale

Pentru orice numere reale x, y, z au loc egalităţile:

1° $x+y=y+x$; $x\cdot y=y\cdot x$ (comutativitatea);
2° $(x+y)+z=x+(y+z)$; $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (asociativitatea);
3° $x+0=x$; $x\cdot1=x$ (existenţa elementului neutru);
4° $x+(-x)=0$; $x\cdot x^{-1}=x\cdot\dfrac{1}{x}=1$, $x\neq0$ (existenţa elementului simetric);
5° $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$; $x\cdot(y-z)=x\cdot y-x\cdot z$ (distributivitatea).

Amintim că ***modulul numărului real*** a este numărul $|a|=\begin{cases}a, & \text{dacă } a\geq0\\ -a, & \text{dacă } a<0.\end{cases}$

Ca şi pentru numerele raţionale, se poate demonstra

Teorema 1 (proprietăţi ale modulului numărului real)

Pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$, avem:

1° $|a|\geq0$;
2° $|a|=|-a|$;
3° $|a|\geq a$;
4° $|a|^2=|a^2|=a^2$;
5° $|a^n|=|a|^n$, $n\in\mathbb{N}^*$;
6° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;
7° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, $b\neq0$;
8° $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Amintim că este adevărată egalitatea $\sqrt{x^2}=|x|$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, utilă pentru efectuarea diverselor transformări. De exemplu, proprietatea cunoscută $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}_+$, se va scrie $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ pentru $a, b\in\mathbb{R}_-$.

Exemple

1. $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=|2-x|.$

2. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$

(fiindcă $\sqrt{2}-1>0$).

În caz că se cere a explicita modulul unei expresii în care apar litere, se vor face presupuneri referitoare la semnul ei.

Exemplu

$$\sqrt{x^2-4x+4}\cdot(x-2)=\sqrt{(x-2)^2}\cdot(x-2)=|x-2|\cdot(x-2)=\begin{cases}(x-2)^2, & \text{dacă } x\ge 2\\ -(x-2)^2, & \text{dacă } x<2.\end{cases}$$

Se poate demonstra că inegalităţile numerice în $\mathbb{R}$ au aceleaşi proprietăţi ca şi în $\mathbb{Q}$.

Teorema 2 (proprietăţi ale relaţiei de inegalitate în $\mathbb{R}$)

Relaţia „≥” are următoarele proprietăţi, oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

1° $a \ge a$ (reflexivitatea);
2° dacă $a \ge b$ şi $b \ge c$, atunci $a \ge c$ (tranzitivitatea);
3° dacă $a \ge b$ şi $b \ge a$, atunci $a = b$ (antisimetria);
4° dacă $a \ge b$, atunci $a + c \ge b + c$;
5° dacă $a \ge b$ şi $c > 0$, atunci $ac \ge bc$;
6° dacă $a \ge b$ şi $c < 0$, atunci $ac \le bc$;
7° dacă $a \ge b$ şi $c \ge d$, atunci $a + c \ge b + d$;
8° dacă $a \ge b$ şi $c \le d$, atunci $a - c \ge b - d$;
9° dacă $a \ge b$, atunci $a^n \ge b^n$, $n \in \mathbb{N}$, n impar;
10° dacă $a \ge b > 0$, atunci $a^n \ge b^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$;
11° dacă $a \ge b$ şi $a \cdot b > 0$, atunci $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$.

Demonstraţie:

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 11°. Pentru diferenţa $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ obţinem: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}\le 0$, deoarece $a\cdot b>0$, $b-a\le 0$. De unde rezultă că $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$. ▶

Exerciţiu. Demonstraţi proprietăţile 1°–10°.

Observaţie. Proprietăţile 1°–11° sînt valabile şi pentru relaţiile „>”, „≤”, „<”.

Proprietăţile enunţate în teorema 2 se aplică, în particular, şi pentru compararea numerelor. Se presupune că $a > b$ (sau $a < b$). Din această inegalitate, folosind proprietăţile inegalităţilor numerice, se obţine o inegalitate echivalentă, a cărei veridicitate se verifică mai simplu.

Exerciţiu rezolvat

Să se compare $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ cu $\frac{7}{20}$.

Rezolvare:

Presupunem că $\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{7}{20}$. Această inegalitate este echivalentă cu inegalităţile: $\sqrt{3}<\frac{7}{10}+1,\ 3<\frac{289}{100}$. Deoarece ultima inegalitate este falsă, rezultă că este falsă şi cea iniţială, adică este adevărat că $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\geq\frac{7}{20}$. Cum numerele nu sînt egale, obţinem că $\frac{\sqrt{3}-1}{2}>\frac{7}{20}$.

Exerciţii şi probleme propuse

A

1. Să se scrie ca număr zecimal:
a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{4}{15}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{2}{25}$; f) $\frac{1}{125}$; g) $\frac{1}{6}$; h) $\frac{1}{9}$.

2. Să se scrie sub formă de fracţie numărul:
a) 0,(13); b) 2,(5); c) 1,(2); d) 0,(23); e) 1,2(7); f) 0,2(73).

3. Să se determine dacă este un număr raţional valoarea expresiei numerice:
a) $\sqrt{2}+3$; b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{12})$; d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$.

4. Va fi suma $a+b$ un număr raţional, dacă:
a) numerele a şi b sînt raţionale;
b) numerele a şi b sînt iraţionale;
c) un număr este raţional, iar celălalt – iraţional?

5. Să se determine aproximările zecimale, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}:
a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{7}$; c) 0,(31); d) $\sqrt{3}+1$; e) $\sqrt{7}-1$.

6. Să se compare numerele:
a) 3,257129 şi 3,258129; b) –7,123465 şi –8,123466.

7. Să se dea un exemplu de număr raţional cuprins între 0,62711 şi 0,62712.

8. Să se compare:
a) 0,428571 cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{3}$ cu $\sqrt{5}$; c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ cu $\frac{\sqrt{5}}{3}$; d) $\sqrt{3}+1$ cu $\sqrt{10}-1$.

9. Să se decidă dacă pentru orice x din mulţimea indicată este adevărată egalitatea:
a) $\frac{x}{|x|}=1,\ x\in\mathbb{R}^*$; b) $x=-|x|,\ x\in\mathbb{R}_-$; c) $(x-|x|)(x+|x|)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: a) $|x+1|=2$; b) $|x+4|=x-3$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia: a) $2x<3x+6$; b) $3-2x>7x-2$.

12. Temperatura apei în ocean, la suprafaţă, este de 14°C, iar la adîncimea de 44 m – de 2°C. Considerînd că temperatura t a apei scade proporţional cu adîncimea h ($t=-ah+b$, $a>0$), să se determine temperatura la adîncimea de: a) 22 m; b) 15 m.

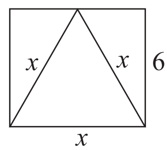
13. Aria suprafeţei unei feţe a cubului este egală cu a cm^2.
a) Să se determine lungimea diagonalei cubului.
b) Să se calculeze volumul cubului cu o eroare mai mică decît 10^{-2} prin lipsă, dacă $a=15$.

B

14. Să se compare: a) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}$ cu $\sqrt{6+5\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ cu $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

15. Să se calculeze: a) $\sqrt{\sqrt{625}}$; b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{512}}}$.

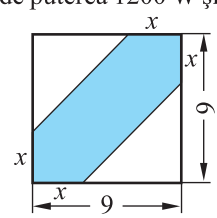
16. Să se determine valoarea lui x din dreptunghiul alăturat.



17. Va fi produsul $a \cdot b$ un număr raţional, dacă:
a) numerele a şi b sînt raţionale;
b) numerele a şi b sînt iraţionale;
c) un număr este raţional nenul, iar celălalt – iraţional?

18. Relaţia dintre puterea P, intensitatea curentului I şi rezistenţa R într-un circuit electric este: $P=I^2 \cdot R$. Care va fi intensitatea curentului, dacă se conectează o sursă de puterea 1200 W şi cu rezistenţa de $500\ \Omega$?

19. Să se determine valoarea lui x din desen, dacă aria porţiunii colorate reprezintă 60% din aria pătratului.



20. Să se determine dacă este un număr raţional valoarea expresiei numerice:
a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-3}$; b) $\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-4}$; c) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

21. Să se arate că $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$, dacă $b>a>0$.

22. Trei magazine oferă reduceri pentru acelaşi centru muzical:
a) preţul este de 99 u.m. şi se oferă reducere de 25% din preţ;
b) preţul este de 111 u.m. şi se oferă reducere de $\dfrac{1}{3}$ din preţ;
c) preţul este de 125 u.m. şi se oferă reducere de 50 u.m.
În care magazin va fi cel mai mic preţ final?

23. Parlamentul Republicii Moldova este format din 101 membri. Cîte locuri îi revin unei coaliţii, dacă ea a acumulat aproximativ $\dfrac{2}{5}$ din voturile participanţilor la scrutin?

24. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ este adevărată „inegalitatea triunghiului":
$$||a|-|b|| \le |a-b| \le |a|+|b|.$$
În ce caz fiecare din semnele „$\le$" poate fi înlocuit cu semnul „="?

25*. Să se dea un exemplu de număr iraţional situat între 0,62711 şi 0,62712.

26*. Ce semne trebuie să aibă a, b, ab pentru ca să se respecte egalitatea $|a|+|b|=|b-a|$?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

A

În itemii 1, 2 indicaţi litera care corespunde variantei corecte.

1. Mulţimea numerelor reale x pentru care se verifică inegalitatea $|x| \leq |-x|$ este 1
A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}_-^*$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R}^*$.

2. Suma oricăror două numere iraţionale 2
A este un număr raţional.
B este un număr iraţional.
C nu se poate determina dacă este un număr raţional sau iraţional.
D este un număr întreg.

3. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, ale numărului $\sqrt{10}$. 2

4. Comparaţi $5\sqrt{3}$ cu $4\sqrt{5}$. 2

5. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$. 3

B

În itemii 1–3 indicaţi litera care corespunde variantei corecte.

1. Valoarea expresiei numerice $\sqrt{\dfrac{9}{4}-\sqrt{2}}$ aparţine mulţimii 1

A $\mathbb{Z}$. **B** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. **C** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **D** $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$.

2. Mulţimea numerelor reale x pentru care este verificată inegalitatea $\dfrac{x}{|x|} \leq -1$ este 1

A $\mathbb{R}_+^*$. **B** $\mathbb{R}_-^*$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R}^*$.

3. Dacă $x \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, atunci 1
A $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$. **B** $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$. **C** $\sqrt{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **D** $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$.

4. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-3}, ale numărului $a = 2-\sqrt{3}$. 1

5. Aflaţi intersecţia şi reuniunea intervalelor $\left[1{,}9;\ \dfrac{\sqrt{5}+2}{2}\right]$, $\left[\dfrac{7}{5},\ \sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. 2

6. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{a}{\sqrt{a}\sqrt{b}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{a}\sqrt{b}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$. 2

7. Determinaţi dacă este un număr raţional valoarea expresiei numerice $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$. 2

MODULUL 2

Elemente de logică matematică şi de teoria mulţimilor

Mă îndoiesc, deci cuget; cuget, deci exist.
René Descartes

Obiective

- recunoaşterea şi utilizarea în diverse contexte a noţiunilor: *propoziţie*, *valoare de adevăr*, *cuantificator*, *teoremă*, *ipoteză*, *concluzie*, *teoremă directă*, *teoremă reciprocă*, *axiomă*, *condiţii necesare*, *condiţii suficiente*, *condiţii necesare şi suficiente*;
- investigarea valorii de adevăr a unei propoziţii cu ajutorul exemplelor, contraexemplelor, proprietăţilor operaţiilor;
- folosirea în diverse contexte a terminologiei aferente teoriei mulţimilor;
- aplicarea relaţiilor de incluziune şi egalitate între mulţimi, a relaţiei de apartenenţă a elementelor unei mulţimi;
- efectuarea operaţiilor cu mulţimi; reprezentarea analitică, sintetică, geometrică a rezultatelor obţinute;
- *folosirea în diverse contexte a proprietăţilor de bază ale operaţiilor cu mulţimi;
- *aplicarea terminologiei aferente inducţiei matematice în situaţii reale şi/sau modelate;
- *aplicarea metodei inducţiei matematice la demonstraţia identităţilor numerice.

§1 Elemente de teoria mulţimilor. Recapitulare şi completări

1.1. Noţiunea de mulţime

Există noţiuni şi relaţii matematice care nu pot fi definite. Printre acestea sînt noţiunile *mulţime*, *element al unei mulţimi* şi relaţia de *apartenenţă*. Aceste noţiuni se exemplifică, se tălmăcesc, însă nu pot fi descrise prin reducerea lor la alte noţiuni.

Astfel, o ***mulţime*** este o colecţie (totalitate) de obiecte oarecare, numite ***elementele mulţimii***, bine determinate şi distincte.

Ne amintim că *o mulţime poate fi definită în următoarele moduri*:

1) prin enumerarea (numirea) elementelor mulţimii (modul sintetic);

2) prin enunţarea unei proprietăţi caracteristice a elementelor mulţimii (modul analitic);

3) cu ajutorul unei diagrame Euler–Venn.

Mulţimea care conţine un număr finit de elemente se numeşte ***finită***. În caz contrar, mulţimea se numeşte ***infinită***.

Numărul de elemente ale unei mulţimi finite M se numeşte ***cardinalul*** acestei mulţimi şi se notează $|M|$ sau card M. Mulţimea care nu are nici un element se numeşte ***mulţime vidă*** şi se notează $\varnothing$; card$\varnothing = 0$.

Exerciţiu rezolvat

Să se enumere elementele mulţimilor (definite cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice a elementelor):
$A=\{x\in \mathbb{R} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $B=\{x\in \mathbb{Z} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $C=\{x\in \mathbb{N} \mid 2<x \text{ şi } x<1\}$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuaţia $2x^2+3x+1=0$ şi obţinem: $A=\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$, $B=\{-1\}$. Mulţimea C nu conţine nici un element, adică $C=\varnothing$.

1.2. Submulţimi, mulţimi egale

Definiţie. Mulţimea A se numeşte **submulţime** a mulţimii B dacă orice element al mulţimii A este element şi al mulţimii B.

Se notează: $A\subseteq B$.

Relaţia $A\subseteq B$ se numeşte ***relaţie de incluziune***, ceea ce înseamnă că orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Relaţia $A\subseteq B$ se citeşte „A este inclusă în B” sau „A este submulţime a mulţimii B”.

Definiţie. Mulţimile A şi B se numesc **egale** dacă $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$.

Se notează: $A = B$.

Mulţimile egale conţin aceleaşi elemente.

Exemple

1. Mulţimile $A=\{1, 3\}$ şi $B=\{x\in \mathbb{R} \mid x^2-4x+3=0\}$ sînt egale, deoarece $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$.

2. Mulţimile $A=\{2, 3, 1, 7\}$ şi $B=\{x\in \mathbb{N} \mid 1\le x\le 7\}$ nu sînt egale, deoarece B nu este o submulţime a mulţimii A $(6\in B,\ 6\notin A)$.

Mulţimea submulţimilor mulţimii A se numeşte ***booleanul mulţimii*** A şi se notează cu $\mathcal{B}(A)$. Booleanul mulţimii A este o mulţime nevidă (chiar dacă A este mulţime vidă), deoarece mulţimii $\mathcal{B}(A)$ îi aparţin cel puţin mulţimea A şi mulţimea $\varnothing$.

În modulul 4 se va demonstra

Teorema 1. Dacă mulţimea A conţine n, $n\in \mathbb{N}$, elemente, atunci mulţimea $\mathcal{B}(A)$ conţine 2^n elemente.

Aşadar, card$\mathcal{B}(A)=2^n$.

Exemplu

Dacă $A = \{o, \Delta, a\}$, atunci card$A=3$;
$\mathcal{B}(A) = \{\varnothing, \{o\}, \{\Delta\}, \{a\}, \{o, \Delta\}, \{o, a\}, \{\Delta, a\}, \{o, \Delta, a\}\}$; card$\mathcal{B}(A)=2^3=8$.

1.3. Operaţii cu mulţimi

1 *Reuniunea mulţimilor*

Definiţie. Se numeşte **reuniunea** a două mulţimi A şi B mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin cel puţin uneia din mulţimile A sau B.

Reuniunea mulţimilor A şi B se notează $A \cup B$ şi se citeşte „A reunit cu B”.
Prin urmare, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ (fig. 2.1 a) – porţiunea haşurată).

2 *Intersecţia mulţimilor*

Definiţie. Se numeşte **intersecţia** a două mulţimi A şi B mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin şi lui A, şi lui B.

Intersecţia mulţimilor A şi B se notează $A \cap B$ şi se citeşte „A intersectat cu B”.
Deci, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$ (fig. 2.1 b) – porţiunea haşurată).
Mulţimile A şi B se numesc ***disjuncte*** dacă $A \cap B = \varnothing$, adică dacă nu au nici un element comun.

3 *Diferenţa a două mulţimi*

Definiţie. Se numeşte **diferenţa** a două mulţimi A şi B (în această ordine) mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin mulţimii A şi nu aparţin mulţimii B.

Diferenţa mulţimilor A şi B se notează $A \setminus B$ sau $A - B$ şi se citeşte „A minus B”.
Aşadar, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$ (fig. 2.1 c) – porţiunea haşurată).

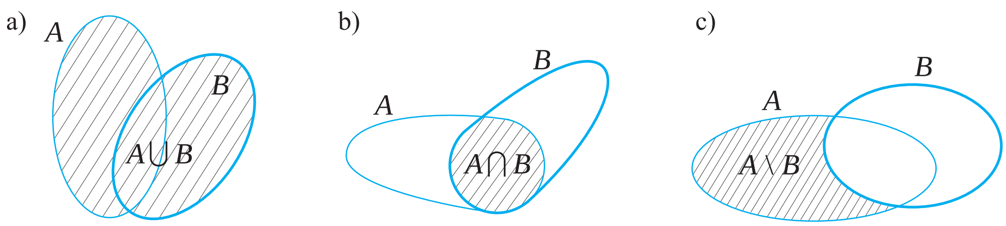


Fig. 2.1

Observaţie. Reuniunea şi intersecţia mulţimilor se aplică la rezolvarea sistemelor, totalităţilor de ecuaţii şi/sau inecuaţii (a se vedea modulele 6–8).

4 *Produs cartezian*

Definiţie. Se numeşte **produs cartezian** a două mulţimi nevide A şi B mulţimea perechilor ordonate (x, y), $x \in A$, $y \in B$.

Produsul cartezian al mulţimilor A şi B se notează $A \times B$ şi se citeşte „A ori B”.
Deci, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Exemple

1. Dacă $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$, atunci

$A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, iar

$B\times A=\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$.

2. Produsul cartezian $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ joacă un rol important în matematică, fizică şi în alte domenii. Perechile de coordonate ale punctelor dintr-un sistem de axe ortogonale reprezintă, de fapt, elemente ale produsului cartezian $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

3. Produsul cartezian $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ reprezintă perechile de coordonate ale punctelor din cadranul I al unui sistem de axe ortogonale.

Evident, în caz general, $A\times B\neq B\times A$.

5 *Proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi*

Operaţiile cu mulţimi posedă un şir de proprietăţi, unele dintre ele fiind similare cu proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire cu numerele reale.

Teorema 2. Pentru orice mulţimi A, B, C, avem:

1° $A\cup B=B\cup A$;	$1^{\circ\prime}$ $A\cap B=B\cap A$;
2° $A\cup A=A$;	$2^{\circ\prime}$ $A\cap A=A$;
3° $A\cup\varnothing=A$;	$3^{\circ\prime}$ $A\cap\varnothing=\varnothing$;
4° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;	$4^{\circ\prime}$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
5° $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;	$5^{\circ\prime}$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
6° $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.	$6^{\circ\prime}$ $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se arate că $A\cup B=B$, dacă $A\subseteq B$.

Rezolvare:

Evident, $B\subseteq A\cup B$. Pentru a obţine egalitatea cerută, e suficient că arătăm incluziunea inversă: $A\cup B\subseteq B$.

Fie $x\in A\cup B$. Atunci $x\in A$ sau $x\in B$. Dacă $x\in A$, atunci $x\in B$ (din condiţia că $A\subseteq B$). Astfel, $x\in B$, ceea ce implică $A\cup B\subseteq B$ şi, în final, $A\cup B=B$.

2. Să se determine reuniunea mulţimilor $A=\mathbb{Z}_-$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\,\|\,|x|\le 100\}$, $C=\mathbb{Z}_+$.

Rezolvare:

În baza proprietăţilor 1°, 4°, obţinem:

$$M=A\cup(B\cup C)=A\cup(C\cup B)=(A\cup C)\cup B=(\mathbb{Z}_-\cup\mathbb{Z}_+)\cup B.$$

Deoarece $\mathbb{Z}_-\cup\mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}$ şi $B\subseteq\mathbb{Z}$, rezultă că $M=\mathbb{Z}\cup B=\mathbb{Z}$.

Exerciţii şi probleme propuse

A

1. Să se verifice dacă sînt egale mulţimile:

a) $\{1, -1\}$ şi $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 7\}$ şi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Fie mulţimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $B = \mathbb{N}$.
Să se determine mulţimea:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

3. Să se determine booleanul mulţimii $A = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}$ şi cardinalul lui.

4. Să se scrie trei numere care satisfac condiţiile:

a) $a \in \mathbb{Z}$ şi $a \notin \mathbb{N}$; b) $a \in \mathbb{Z}$ şi $|a| < 5$.

5. Fie mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Să se determine care din ele are ca element:

a) 2; b) $\sqrt{17}$; c) $(2 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$.

6. Să se determine produsul cartezian $A \times B$ al mulţimilor A, B, dacă:

a) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$; b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$.

Este adevărat că $A \times B \neq B \times A$?

7. Fie mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\}$.

Să se stabilească dacă sînt egale mulţimile A şi B şi să se determine mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$.

B

8. Să se verifice dacă sînt egale mulţimile $\{\sqrt{2}\}$ şi $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 2 = 0\}$.

9. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 36 < 0\}$.
Să se determine mulţimea: a) $B \setminus A$; b) $A \setminus B$.

10. Să se determine card A, booleanul mulţimii A, card $\mathcal{B}(A)$, dacă $A = [0, 4) \cap \mathbb{Z}$.

11. Să se determine toate numerele care satisfac condiţiile:

a) $a \in \mathbb{R}$ şi $a \notin \mathbb{Q}$; b) $a \in \mathbb{N}$ şi $2 < |a| < 10$.

12. Fie mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Să se determine care din ele are ca element:

a) $-\sqrt{2}$; b) $|\sqrt{3} - 2| - \sqrt{3}$; c) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

13*. Să se demonstreze egalitatea:

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

14*. Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care este adevărată propoziţia:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \varnothing$.

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - m < 0\} = \varnothing$.

15*. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) Dacă $C \cup A = C \cup B$, atunci $A = B$. b) Dacă $C \cap A = C \cap B$, atunci $A = B$.

§2 Elemente de logică matematică

2.1. Noţiunea de propoziţie. Recapitulare şi completări

Problemă. Fie enunţurile:

1. Oraşul Chişinău este capitala Republicii Moldova.
2. $3x^2 - x = 0$.
3. Orice pătrat este romb.
4. $\sqrt{3} = 3$.

a) Să se determine care din aceste enunţuri sînt propoziţii. Argumentaţi răspunsul.
b) Să se determine valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii.

În logica matematică se numeşte ***propoziţie*** un enunţ despre care se poate spune cu certitudine că este adevărat sau fals.

Propoziţiile se vor nota cu minusculele alfabetului latin: a, b, ..., p, q, ...

Revenind la problemă, constatăm că enunţurile 1, 3, 4 sînt propoziţii, fiindcă ne putem pronunţa cu certitudine despre valoarea de adevăr a acestora: enunţurile 1 şi 3 sînt propoziţii adevărate, iar enunţul 4 este propoziţie falsă. Despre valoarea de adevăr a enunţului 2, $3x^2 - x = 0$, nu ne putem pronunţa, deoarece, de exemplu, pentru $x = 0$ se obţine o propoziţie adevărată, iar pentru $x = 1$, o propoziţie falsă, însă valoarea lui x nu se cunoaşte.

Observaţie. Spre deosebire de enunţul 2, sînt egalităţi (inegalităţi) care conţin variabile şi totuşi sînt propoziţii, fiindcă ele se transformă în egalităţi (inegalităţi) numerice adevărate, oricare ar fi valorile variabilelor dintr-un anumit domeniu.
Ca exemplu pot servi proprietăţile operaţiilor cu numere reale: $x + 0 = 0 + x$, $x \cdot y = y \cdot x$, $x, y \in \mathbb{R}$, ş.a.

Pornind de la propoziţiile p, q, cu ajutorul operatorilor logici „şi”, „sau”, „non” („nu”), „dacă..., atunci...”, se obţin ***propoziţii*** (***compuse***): „p şi q”, „p sau q” ş.a.m.d. De exemplu, pentru propoziţiile p: „2 este un număr natural”, q: „–3 este număr întreg”, se poate forma propoziţia „2 este număr natural şi –3 este număr întreg”.

În continuare, ne vom preocupa de o altă clasificare a propoziţiilor – în *propoziţii particulare*, *propoziţii generale*. Să considerăm propoziţiile:

1. Numărul 171 este divizibil cu 3.
2. Orice număr întreg este divizibil cu 3, dacă suma cifrelor din scrierea sa zecimală este divizibilă cu 3.
3. Numărul 2 este soluţie a ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$.
4. Oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc.

După gradul de generalitate, propoziţiile 1 şi 3 se referă la cazuri particulare, sînt ***propoziţii particulare***, iar propoziţiile 2 şi 4 au caracter general, se referă la un element arbitrar al unei mulţimi (sînt ***propoziţii generale***). Formularea propoziţiilor generale poate fi mai compactă, dacă utilizăm ***cuantificatorul universal*** ($\forall$) (se citeşte „pentru orice”, „oricare ar fi”) sau ***cuantificatorul existenţial*** ($\exists$) (se citeşte „există”). De exemplu, propoziţia „Pentru orice număr real x, se îndeplineşte condiţia $x^2+1\geq 0$" se va scrie $(\forall x\in \mathbb{R})\ (x^2+1\geq 0)$. Propoziţia „Există un poligon regulat ale cărui unghiuri interioare sînt de $110°$" se poate scrie $(\exists x\in M)$ (unghiurile interioare ale lui x sînt de $110°$), unde M este mulţimea tuturor poligoanelor regulate dintr-un plan.

Printre propoziţiile matematice, un loc aparte îl ocupă teoremele şi axiomele. ***Teoremele*** sînt propoziţii generale care, de obicei, necesită demonstraţii, adică argumentarea riguroasă a faptului că ele sînt adevărate. Pe parcursul demonstraţiei se utilizează alte propoziţii adevărate, unele dintre ele fiind teoreme (deja demonstrate), iar altele pot fi axiome. ***Axiomele*** sînt propoziţii considerate adevărate fără a fi demonstrate (nici nu pot fi demonstrate). Ele denotă unele cerinţe şi proprietăţi (eventual general recunoscute) pentru noţiunile şi obiectele studiate în cadrul unor teorii riguros construite. Axiome sînt, de exemplu, propoziţiile: „Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una", „Prin orice punct exterior unei drepte se poate duce o unică paralelă cu dreapta dată".

Majoritatea teoremelor din matematică au (sau pot fi scrise în) una din formele: „Dacă A, atunci B" sau „A dacă şi numai dacă B", unde A, B sînt ***condiţii*** ce ţin de noţiunile şi conceptele matematice.

Exemple

1. Dacă un patrulater este romb, atunci diagonalele lui sînt perpendiculare.

2. Numărul întreg a este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima (din dreapta) cifră din scrierea zecimală a lui a este 0 sau 5.

În teoremele de forma „Dacă A, atunci B", condiţia A se numeşte ***condiţie suficientă*** (pentru B), iar B – ***condiţie necesară*** (pentru A). În teoremele de forma „A dacă şi numai dacă B", condiţiile A, B se numesc ***condiţii echivalente*** sau ***condiţii necesare şi suficiente***, adică A este condiţie necesară şi suficientă pentru B, iar B – condiţie necesară şi suficientă pentru A.

Exemple

3. În teorema „Dacă un număr natural este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2", condiţia „un număr natural este divizibil cu 6" este condiţie suficientă pentru condiţia „numărul natural este divizibil cu 2", care, la rîndul său, este condiţie necesară pentru prima.

4. În teorema din exemplul 2, condiţiile „numărul întreg a este divizibil cu 5" şi „ultima cifră din scrierea zecimală a numărului întreg este 0 sau 5" sînt echivalente.

Orice teoremă include următoarele componente structurale: ***partea explicativă***, ***ipoteza***, ***concluzia***.

Partea explicativă a teoremei indică mulţimea de obiecte în cadrul căreia este adevărată propoziţia enunţată prin teoremă. În unele cazuri, partea explicativă este prezentă explicit, în alte cazuri – implicit.

Orice teoremă de tipul „Dacă A, atunci B" poate fi scrisă sub forma

$$(x\in M)(A(x)\Rightarrow B(x)),$$

unde $x\in M$ este partea explicativă, $A(x)$ – ipoteza, $B(x)$ – concluzia.

Exemplu

5 Considerăm teorema: „Fie p un patrulater convex din planul α. Dacă p este romb, atunci diagonalele lui sînt perpendiculare”.

Partea explicativă a teoremei este „p este un patrulater convex din planul α”, ipoteza teoremei – „p este romb”, concluzia teoremei – „diagonalele lui p sînt perpendiculare”.

Schimbînd locurile ipotezei şi concluziei teoremei „Dacă A, atunci B”, obţinem o altă propoziţie: „Dacă B, atunci A”, numită ***reciproca teoremei***, care poate fi adevărată (o nouă teoremă) sau falsă. În cazul în care reciproca „Dacă B, atunci A” este adevărată, teorema iniţială se numeşte ***teoremă directă***, iar reciproca ei – ***teoremă reciprocă***. Teorema reciprocă se scrie $(x \in M)(B(x) \Rightarrow A(x))$.

Exemple

6 Reciproca teoremei „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2” este „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 2, atunci el este divizibil cu 6”, care este o propoziţie falsă. Aceasta se verifică printr-un *contraexemplu*: numărul 4 este divizibil cu 2, dar nu este divizibil cu 6.

7 Reciproca teoremei „Dacă punctul de intersecţie a diagonalelor unui patrulater este mijlocul lor, atunci acest patrulater este paralelogram” este „Dacă un patrulater este paralelogram, atunci punctul de intersecţie a diagonalelor lui este mijlocul fiecărei diagonale” – propoziţie adevărată, deci este teoremă.

Dacă pentru teorema „Dacă A, atunci B” este adevărată reciproca ei, atunci condiţiile A şi B sînt echivalente, deci este adevărată teorema „A dacă şi numai dacă B”. Astfel, teoremele directă şi reciprocă din exemplul 7 pot fi formulate ca o singură teoremă: „Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului este mijlocul lor”. Adică $(x \in M)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

În continuare ne vom referi la unele metode de demonstraţie a teoremelor (în afară de demonstraţia directă).

Se cunoaşte din gimnaziu ***metoda reducerii la absurd*** de demonstraţie a teoremelor de forma „Dacă A, atunci B”. Ea reprezintă un raţionament prin care se presupune că ceea ce trebuie demonstrat (concluzia B) nu este adevărat şi, prin deducţii logice, această presupunere duce la o contradicţie (absurditate). Atunci rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci concluzia iniţială este adevărată.

Exemplu

Să demonstrăm prin metoda reducerii la absurd propoziţia „Dacă un număr întreg a nu este divizibil cu 3, atunci el nu este divizibil cu 6”. Presupunînd contrariul, că a este divizibil cu 6, vom arăta că a este divizibil cu 3. Într-adevăr, întrucît a este divizibil cu 6, el poate fi scris sub forma $a = 6t$, $t \in \mathbb{Z}$, sau $a = 3 \cdot (2t)$, $2t \in \mathbb{Z}$. Deci, a este divizibil cu 3, ceea ce contrazice ipoteza. În baza metodei reducerii la absurd, obţinem că propoziţia iniţială este adevărată.

O altă metodă de demonstraţie a unor propoziţii se expune în secvenţa 2.2.

2.2. Inducţia matematică

Procedeele de obţinere a propoziţiilor particulare din altele generale, sau invers, se aplică pe larg, deoarece orice teorie în matematică (şi nu numai) se construieşte în mod deductiv, prin care toate propoziţiile (teoremele) se obţin din altele, adevărate.

Raţionamentul logic prin care din propoziţii generale se obţin propoziţii particulare se numeşte ***deducţie***.

Exemplu

Propoziţia generală „Orice ecuaţie de gradul II cu coeficienţi reali, care are discriminantul nenegativ, are soluţii reale” se referă la toate elementele mulţimii ecuaţiilor de gradul II cu coeficienţi reali şi cu discriminant nenegativ, deci este o propoziţie generală.

Propoziţia „Ecuaţia $2x^2+x-5=0$ are soluţii reale” se referă la un element concret al mulţimii menţionate, deci este o propoziţie particulară.

Fie $P(x)$ un enunţ ce se referă la un element arbitrar $x, x\in M$. Dacă o propoziţie generală $(\forall x\in M)P(x)$ este adevărată, atunci, prin deducţie, din ea se obţin propoziţii particulare adevărate: $P(a)$ pentru $x=a$.

Propoziţii adevărate se pot obţine folosind raţionamentul logic numit ***inducţia***. Cu ajutorul lui, din propoziţii particulare se obţin propoziţii generale. Se aplică ***inducţia incompletă***, pentru care propoziţia generală se formulează în baza examinării *unor* cazuri particulare, şi ***inducţia completă***, pentru care propoziţia generală se formulează în baza examinării *tuturor* cazurilor particulare posibile.

Prin inducţia incompletă se pot obţine propoziţii generale care s-ar putea să fie adevărate, dar s-ar putea să fie şi false. Însă prin inducţia completă se obţin propoziţii generale neapărat adevărate.

Exemplu

Fie propoziţiile particulare adevărate „$1+2<11$” şi „$1+3<11$”. În baza acestor propoziţii se pot forma mai multe propoziţii generale:
p: „Suma oricăror două numere naturale este mai mică decît 11”;
q: „Suma oricăror două numere naturale mai mici decît 4 este mai mică decît 11”.

Propoziţia *p* este falsă, iar propoziţia *q* este adevărată, ceea ce se poate stabili prin examinarea tuturor propoziţiilor particulare:

$$1+1<11,\ 1+2<11,\ 1+3<11,\ 2+2<11,\ 2+3<11,\ 3+3<11.$$

Încă o metodă de demonstraţie a propoziţiilor generale (teoremelor) este ***metoda inducţiei matematice***.

Dacă pentru un enunţ $P(n), n\in\mathbb{N}$, este adevărată propoziţia particulară $P(0)$ (sau $P(m)$, m – număr natural fixat) şi din presupunerea că este adevărată propoziţia $P(k)$ $(k>m)$ rezultă că este adevărată propoziţia $P(k+1)$, atunci este adevărată propoziţia generală $(\forall n\in\mathbb{N})P(n)$ (respectiv $n\geq m$).

Menţionăm că această metodă se poate aplica doar la propoziţiile a căror esenţă ţine de numerele naturale. Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a propoziţiei $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m)P(n)$ se efectuează în 3 etape.

1. Se verifică dacă propoziţia particulară $P(m)$ este adevărată.
2. Utilizînd ipoteza că propoziţia $P(k), k \geq m,$ este adevărată, se demonstrează că este adevărată şi propoziţia $P(k+1)$.
3. Dacă ambele etape ale demonstraţiei sînt verificate, atunci este adevărată propoziţia $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m)P(n)$.

Exerciţiu rezolvat

Aplicînd metoda inducţiei matematice, să se arate că pentru orice număr natural nenul n este verificată egalitatea:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Rezolvare:

Folosind cuantificatorul universal, această propoziţie generală poate fi scrisă sub forma $(\forall n \in \mathbb{N}^*)P(n)$, unde $P(n)$ semnifică „$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$”.

Parcurgem etapele metodei inducţiei matematice.

1. Pentru $n=1$ se obţine propoziţia particulară $1=\frac{1(1+1)}{2}$ şi ea este adevărată.

2. Presupunem că pentru un oarecare k natural este adevărată propoziţia particulară $P(k): 1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Utilizînd această egalitate, vom verifica dacă este adevărată propoziţia $P(k+1): 1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

Procedăm astfel:

$$(1+2+\ldots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Prin urmare, propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

3. În baza metodei inducţiei matematice, rezultă că egalitatea $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exerciţii şi probleme propuse

A

1. Să se determine care dintre următoarele enunţuri sînt propoziţii şi să se afle valorile de adevăr ale acestora.

a) Temperatura de fierbere a apei la presiunea atmosferică de 760 mm ai coloanei de mercur este de 110°C.

b) Poligonul *ABCD* este un pătrat.

c) Greutatea specifică a apei de mare diferă de cea a apei distilate.

2. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) $(\exists x \in \mathbb{N})\ (x^2 - x - 2 = 0)$. b) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (x^2 - x - 2 = 0)$.

c) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (x^2 - x - 1 = 0)$. d) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 - x - 2 = 0)$.

3. Să se formuleze propoziţii particulare obţinute din propoziţia generală:

a) Orice număr natural divizibil cu 10 este divizibil cu 5.

b) Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$.

4. Fie teorema: „Dacă patrulaterul $ABCD$ este un romb, atunci diagonalele lui sînt perpendiculare”. Să se formuleze reciproca acestei teoreme, apoi să se determine valoarea ei de adevăr.

B

5. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) Temperatura de fierbere a apei în munţi (circa 900 m deasupra nivelului mării) este mai mică decît 100°C.

b) $\sqrt{725} \in \mathbb{Q}$.

6. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) $(\forall x \in M)$ (mărimea unghiurilor alăturate bazei unui triunghi isoscel este de 30°), unde M este mulţimea triunghiurilor isoscele dintr-un plan.

b) $(\exists x \in U)$ (mărimile unghiurilor interioare ale triunghiului x nu depăşesc 50°), unde U este mulţimea triunghiurilor echilaterale dintr-un plan.

c) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (|x+2| + |x+3| = 0)$.

d) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (|x+2| + x^2 - x + 1 > 0)$.

7. Să se determine componentele structurale ale:

a) teoremei lui Pitagora;

b) teoremei „Mărimea unghiurilor interioare ale unui triunghi echilateral este de 60°”.

8. Aplicînd metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice n, $n \in \mathbb{N}^*$, este adevărată propoziţia:

a) $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

d) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n}{3}(n+1)(n+2)$.

9. Utilizînd metoda reducerii la absurd, să se arate că este adevărată propoziţia „Dacă un număr întreg a nu este divizibil cu 2, atunci el nu este divizibil cu 10”.

10. Fie teorema „Dacă numerele a, b sînt raţionale, atunci suma $a+b$ este un număr raţional”. Să se formuleze reciproca şi să se determine valoarea ei de adevăr.

11*. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) Există un poligon regulat ale cărui unghiuri interioare sînt de 110°.

b) Cifra unităţilor numărului 7^{162} este 3.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. Să se determine care dintre următoarele enunţuri sînt propoziţii şi să se afle valorile de adevăr ale acestora.
a) $\sqrt{3}$ este număr real.
b) Greutatea specifică a gheţii este mai mică decît cea a apei.
c) Atena este zeiţa înţelepciunii în mitologia greacă.
d) Organizaţia Naţiunilor Unite (ONU) a fost fondată în 1945, pentru a instaura în toate ţările regimuri de aceeaşi orientare.
e) Piramidele egiptene au fost construite în secolul al XVI-lea d. H.
f) În Sistemul Solar sînt 6 planete.
g) $(\exists x\in \mathbb{R})\ (|x+2|<2)$.   h) $(\forall x\in \mathbb{R})\ (|x+2|<2)$.

2. Să se formuleze o teoremă a cărei reciprocă este o propoziţie adevărată.

3. Să se determine condiţia necesară şi condiţia suficientă ale teoremei; să se formuleze reciproca ei şi să se determine valoarea de adevăr a acesteia:
a) Dacă numărul întreg a se divide cu 14, atunci el se divide cu 7.
b) Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci el are două unghiuri ascuţite.

4. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) $(\forall x\in \mathbb{R})\ (x^2-x+1>0)$.   b) $(\exists n\in \mathbb{N}^*\setminus\{1\})\ (n\,|\,3$ şi $n\,|\,7)$.

5. Fie mulţimile $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5, 9\}$.
Să se determine $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times B$.

6. Într-o clasă sînt 28 de elevi şi toţi frecventează fie secţia de volei, fie secţia de baschet, fie ambele secţii. Cîţi elevi frecventează ambele secţii, dacă secţia de volei este frecventată de 12 elevi, iar cea de baschet – de 20 de elevi?

B

7. Să se determine mulţimile $A\cup B$, $A\cap B$, dacă $A=\{x\in \mathbb{R}\,|\,(x+1)^2(x-5)^2\le 0\}$ şi $B=\{x\in \mathbb{R}\,|\,x>-3\}$.

8. Fie S_1, S_2 mulţimile soluţiilor în $\mathbb{R}$ ale ecuaţiilor $x^2-5x-6=0$ şi respectiv $\sqrt{x-6}\cdot(x^3-1)=0$.
Să se determine: a) $S_1\cup S_2$; b) $S_1\cap S_2$; c) $S_1\setminus S_2$; d) $S_2\setminus S_1$; e) $S_1\times S_2$.

9. Să se determine booleanul mulţimii $A=[-2, 3)\cap \mathbb{Z}$.

10*. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) Mulţimea numerelor raţionale pozitive are cel mai mic număr.
b) Oricare ar fi n natural, fracţia $\dfrac{n}{n+1}$ este ireductibilă.
c) $(\exists x\in \mathbb{R})\ (\sqrt{2}x^2-\sqrt[4]{31}x+1<0)$.

11*. Să se arate că este adevărată propoziţia:
a) Pentru orice numere raţionale a, b, $a<b$, există cel puţin un număr raţional c, astfel încît $a<c<b$.
b) Oricare ar fi numerele iraţionale (raţionale) a, b, există cel puţin un număr iraţional c, astfel încît $a<c<b$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Decideţi dacă enunţul „Un patrulater convex are 3 diagonale” este o propoziţie şi, în caz afirmativ, determinaţi valoarea ei de adevăr. 1

2. Fie propoziţiile p: „$4 | 15$”, q: „$4 | 8$”. 2
a) Alcătuiţi propoziţiile compuse: „p şi q”, „p sau q”, „non p”, „non q”.
b) Determinaţi valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii obţinute.

3. Fie teorema „Dacă un patrulater este romb, atunci în el se poate înscrie un cerc”. 3
a) Determinaţi condiţia necesară şi condiţia suficientă.
b) Formulaţi reciproca teoremei şi determinaţi valoarea ei de adevăr.

4. Fie mulţimile $A = \{0, 2, 3, 6\}$ şi $B = \{2, 3, 7, 12\}$. Determinaţi care dintre mulţimile 2
$M_1 = \{2, 3\}$, $M_2 = \{2, 3, 6\}$, $M_3 = \{0, 2, 3, 6, 7, 12\}$,
$M_4 = \{0, 6\}$, $M_5 = \{7, 12\}$, $M_6 = \{0, 6, 7, 12\}$
sînt egale cu mulţimea:
a) $A \cup B$; b) $A \cap B$.

5. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: 2
a) $\{x, y, z\} = \{y, z, x\}$; b) $3 \not\subset \{3\}$.

B

1. Decideţi dacă enunţul „Şterge geamurile” este o propoziţie şi, în caz afirmativ, determinaţi valoarea ei de adevăr. 1

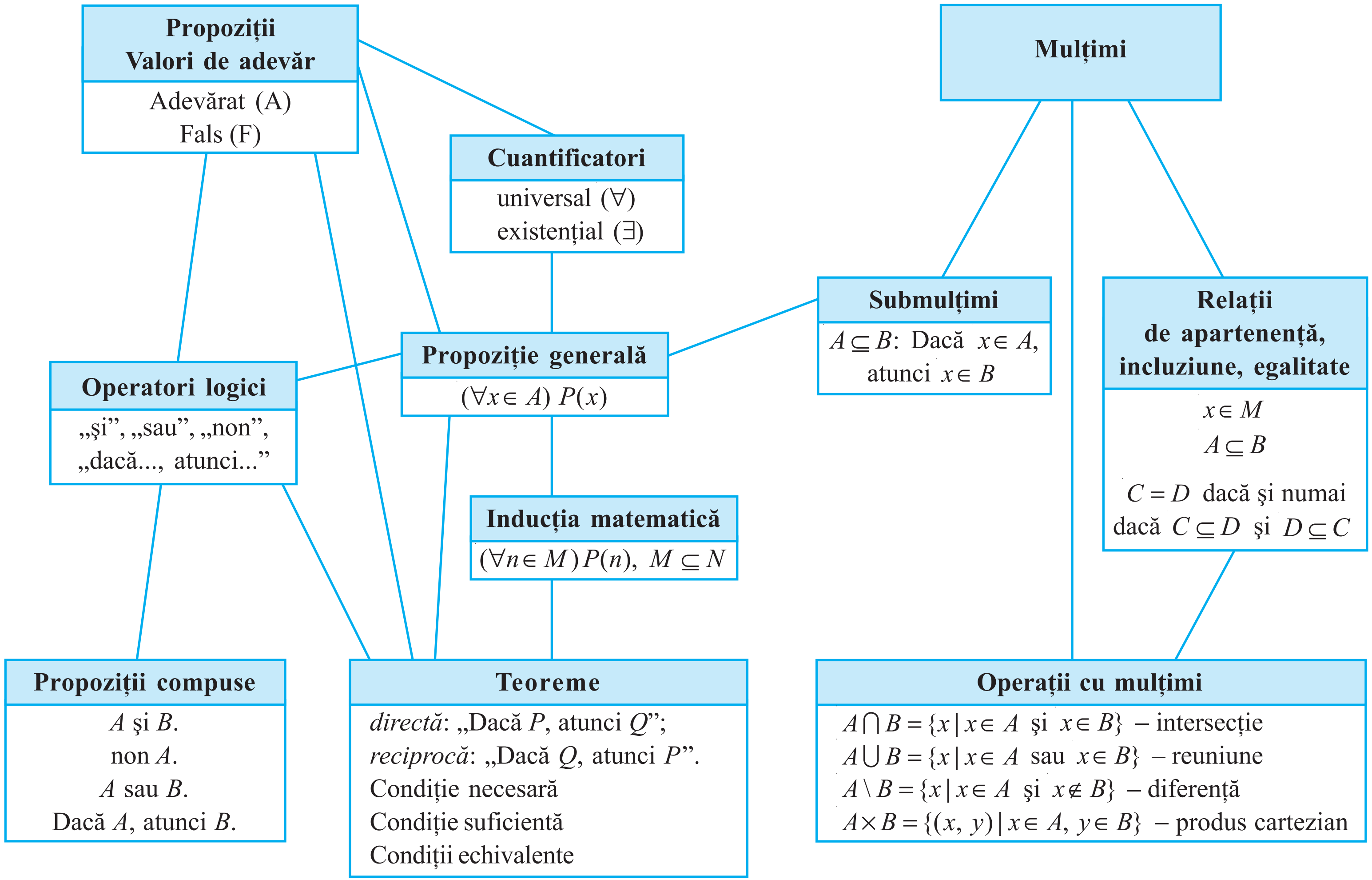
2. Fie propoziţiile p: „$4^2 = 15$”, q: „$\sqrt{16} = 4$”. 2
a) Alcătuiţi propoziţiile compuse: „p şi q”, „p sau q”, „non p”, „non q”.
b) Determinaţi valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii obţinute.

3. Fie teorema „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci lui i se poate circumscrie un cerc”. 3
a) Determinaţi condiţia necesară şi condiţia suficientă.
b) Formulaţi reciproca teoremei şi determinaţi valoarea ei de adevăr.

4. Fie S_1, S_2 mulţimile de soluţii în $\mathbb{R}$ ale ecuaţiilor $x^2 + 2x - 3 = 0$ şi respectiv $(x-3)(x^3-1) = 0$. 2
Determinaţi:
a) $S_1 \cup S_2$; b) $S_1 \cap S_2$; c) $S_2 \setminus S_1$; d) $S_1 \setminus S_2$.

5. Aplicînd metoda inducţiei matematice, demonstraţi că: 2
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Elemente de logică matematică şi de teoria mulţimilor



MODULUL 3 Radicali. Puteri. Logaritmi

Unde-i unu, nu-i putere, $(1^1=1;\ 2^1=2;\ 3^1=3;\ ...)$
Unde-s doi, puterea crește. $(2^2=4;\ 3^2=9;\ ...)$

Obiective

- efectuarea operațiilor cu numere reale: adunarea, scăderea, înmulțirea, impărțirea, ridicarea la putere cu exponent rațional sau real; a operațiilor cu radicali de ordinul n, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, a operațiilor cu logaritmi ai numerelor reale pozitive;
- aplicarea proprietăților puterilor, radicalilor, logaritmilor la efectuarea unor calcule cu numere reale;
- folosirea estimărilor și aproximărilor pentru verificarea validității unor calcule cu numere reale, folosind puteri, radicali, logaritmi.

§ 1 Radicali

1.1. Noțiunea de radical. Proprietăți

Se știe că puterea unui număr real b cu exponent natural nenul n, notată b^n, este produsul a n numere, fiecare fiind egal cu b. Deci, fiind dată baza b și exponentul n, se determină valoarea puterii $b^n=a$.

S-a examinat și una din problemele inverse: fiind dată valoarea a a puterii și exponentul n, $n=2$, se caută baza b pentru care $b^2=a$. Astfel, rezolvarea ecuațiilor de gradul II a impus definirea noțiunii *radical de ordinul 2*. Anume soluția pozitivă a ecuației $x^2=a$, $a>0$, s-a notat cu $\sqrt{a}$ și s-a numit ***radical de ordinul 2*** din a.

Diverse probleme necesită rezolvarea unor ecuații de grad mai mare decît 2. De exemplu, să se determine lungimea muchiei unui cub cu volumul de: a) 8 m³; b) 5 m³.

În cazul a), lungimea muchiei este de 2 m. Pentru varianta b) nu există în $\mathbb{Q}$ valoarea exactă a lungimii muchiei, deoarece nu există un număr rațional x, astfel încît $x^3=5$. Soluția acestei ecuații se notează $\sqrt[3]{5}$ și este *radical de ordinul 3* din 5.

Definiții. • Numărul real b se numește **radical de ordin impar** $\boldsymbol{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$, din numărul real a, dacă $b^n=a$.

• Numărul real nenegativ b se numește **radical de ordin par** $\boldsymbol{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$, din numărul real nenegativ a, dacă $b^n=a$.

Radicalul de ordinul n din a se notează $\sqrt[n]{a}$. Deci, $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a,\ a, b\in \mathbb{R}$, $n=2k+1$, şi $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a,\ a, b\in \mathbb{R}_+,\ n=2k,\ k\in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$; $\sqrt[3]{-0{,}125}=-0{,}5$; $\sqrt[4]{-16}$ nu există; $\sqrt[n]{0}=0,\ n\in \mathbb{N},\ n\geq 2$.

Observație. Aplicînd proprietățile inegalităților numerice, se poate demonstra că în condițiile enunțate în definiție valoarea radicalului este unic determinată.

Radicalul de ordinul n dintr-un număr a se calculează conform definiției, care afirmă că trebuie să se determine soluția reală a ecuației $x^n=a,\ a\in \mathbb{R},\ n=2k+1$, sau soluția nenegativă a ecuației $x^n=a,\ a\in \mathbb{R}_+,\ n=2k,\ k\in \mathbb{N}^*$. Soluția acestei ecuații poate fi un număr rațional sau un număr irațional. Pentru a determina (în caz de necesitate) aproximările zecimale ale acestui număr, folosim calculatorul sau procedăm ca în următoarea problemă.

Problemă. Să se calculeze aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}.

Rezolvare:

Folosind inegalitatea evidentă $1^3<2<2^3$, obținem că $1<\sqrt[3]{2}<2$, adică 1 şi 2 sînt aproximările zecimale prin lipsă şi respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decît 1, ale numărului $\sqrt[3]{2}$. Vom examina cuburile numerelor de la 1 pînă la 2 cu pasul 0,1: $1{,}1^3$; $1{,}2^3$; ...; $1{,}9^3$; 2^3. Observăm că numărul 2 este cuprins între numerele $1{,}2^3=1{,}728$ şi $1{,}3^3=2{,}197$; deci, $1{,}2<\sqrt[3]{2}<1{,}3$. Cum $1{,}3-1{,}2=10^{-1}$, rezultă că 1,2 şi 1,3 sînt aproximările prin lipsă şi respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decît 10^{-1}, ale numărului $\sqrt[3]{2}$.

Vom examina cuburile numerelor de la 1,21 pînă la 1,29 cu pasul 0,01: $1{,}21^3$; $1{,}22^3$; ...; $1{,}29^3$. Deoarece $1{,}953125=1{,}25^3<2<1{,}26^3=2{,}00376$, rezultă că $1{,}25<\sqrt[3]{2}<1{,}26$, adică numerele 1,25 şi 1,26 sînt aproximările prin lipsă şi respectiv prin adaos ale numărului $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}.

Teorema 1 (proprietăți ale radicalilor)

Pentru $a, b\in \mathbb{R}_+$ şi n număr natural nenul par sau $a, b\in \mathbb{R}$ şi n număr natural impar, $k, p, s\in \mathbb{N}^*$, avem:

1° $(\sqrt[n]{a})^n=a$;

2° $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

3° $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$;

4° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b\neq 0$;

5° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a},\ k\geq 2$;

6° $\sqrt[np]{a^{nk}}=\sqrt[p]{a^k},\ p\geq 2$;

7° $a>b\geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$;

8° $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|,\ \sqrt{a^2}=|a|$;

9° $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|},\ a\cdot b\in \mathbb{R}_+$;

10° $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}},\ a\cdot b\in \mathbb{R}_+,\ b\neq 0$;

11° $\sqrt[2kp]{a^{2ks}}=\sqrt[p]{|a^s|},\ a\in \mathbb{R},\ p\geq 2$.

Demonstrație:

Pentru a demonstra aceste proprietăți, vom folosi definiția radicalului şi vom ține cont că radicalul (dacă există) este un număr unic determinat. Altfel spus, este suficient să arătăm că puterea respectivă a expresiei dintr-un membru al egalității este egală cu expresia de sub radical din celălalt membru al ei.

1° Notăm $b=\sqrt[n]{a}$, atunci $b^n=a$ şi, după ce substituim b cu $\sqrt[n]{a}$, obţinem $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

2° Într-adevăr, $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=a\cdot b$. În baza definiţiei radicalului de ordinul n, rezultă că $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Proprietatea 3° este o consecinţă a proprietăţii 2°, iar proprietăţile 4°, 5°, 6°, 9° şi 10° se demonstrează în mod analog.

7° Presupunînd că $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}$, obţinem $(\sqrt[n]{a})^n\le(\sqrt[n]{b})^n$ (modulul 1, teorema 2, proprietatea 9°), adică $a\le b$, ceea ce este o contradicţie. Prin urmare, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

8° Luînd în consideraţie că radicalul dintr-un număr nenegativ este nenegativ şi că $(\pm a)^{2k}=a^{2k}$, obţinem: $\sqrt[2k]{a^{2k}}=\sqrt[2k]{|a|^{2k}}=|a|$. ▶

Exerciţiu. Demonstraţi proprietăţile 3°–6°, 9°–11°.

Observaţie. Dacă n este număr natural par, atunci, la aplicarea proprietăţilor 2°, 4°, 9°. 10°, 11°, trebuie să ne convingem că membrul drept este un număr nenegativ.

1.2. Transformări ale expresiilor iraţionale

1 *Scoaterea factorului de sub radical, introducerea factorului sub radical*

Exerciţii rezolvate

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\sqrt[3]{7^4-7^3\cdot 5}$.

Rezolvare:

$\sqrt[3]{7^4-7^3\cdot 5}=\sqrt[3]{7^3(7-5)}=\sqrt[3]{7^3}\cdot\sqrt[3]{2}=7\cdot\sqrt[3]{2}$.

Dacă radicalul este de ordin par şi sub radical sînt variabile, atunci pot fi folosite proprietăţile 8°–11°.

2. Să se scoată factorul de sub radical: $\sqrt[4]{x^6-5x^2}$, $x\in(-\infty, -\sqrt[4]{5}]\cup[\sqrt[4]{5}, +\infty)$.

Rezolvare:

$\sqrt[4]{x^6-5x^2}=\sqrt[4]{x^2(x^4-5)}=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}=\sqrt{|x|}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}$.

Observaţie. Este greşit să aplicăm proprietăţile 1°–7° în cazul în care nu se cunosc semnele valorilor factorilor, deci *este greşit*, de exemplu, *să scriem*

$$\sqrt[4]{x^7(x^4-5)}=\sqrt[4]{x^7}\cdot\sqrt[4]{x^4-5}.$$

Într-adevăr, domeniul valorilor admisibile (DVA) al expresiei din membrul stîng al egalităţii este mulţimea $[-\sqrt[4]{5}, 0]\cup[\sqrt[4]{5}, +\infty)$, iar DVA al expresiei din membrul drept este mulţimea $[\sqrt[4]{5}, +\infty)$.

La introducerea factorului sub radical *se pot comite greşeli* de tipurile:

$$-7\sqrt{2}=\sqrt{(-7)^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{98};\qquad x\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{x^2}}=\sqrt[4]{\frac{x^4y}{x^2}}=\sqrt[4]{x^2y}.$$

Corect este: $-7\sqrt{2}=-\sqrt{98}$; $x\cdot\sqrt[4]{\dfrac{y}{x^2}}=\begin{cases}\sqrt[4]{x^2y}, \text{ dacă } x>0\\ -\sqrt[4]{x^2y}, \text{ dacă } x<0.\end{cases}$

2 ***Raționalizarea numitorului unui raport algebric*** se numeşte transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia. Numitorul raportului poate fi raționalizat prin diverse moduri.

a) *Amplificarea raportului de tipul* (A – o expresie oarecare):

1) $\dfrac{A}{a\cdot\sqrt[n]{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, cu $\sqrt[n]{b^{n-1}}$;

2) $\dfrac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, cu expresia conjugată numitorului ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sînt *expresii conjugate*).

Exemplu

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}.$$

b) *Utilizarea formulelor*:

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ a, b\geq 0;$$

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b,\ n\in\mathbb{N},\ n \text{ impar}.$$

Exemplu

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=$$

$$=2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}).$$

c) *Eliminarea succesivă a radicalilor unei sume algebrice*

Exemplu

$$\frac{1}{\sqrt{3}+5-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5-\sqrt{2})(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5)^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})(26-10\sqrt{3})}{(26+10\sqrt{3})(26-10\sqrt{3})}=\frac{1}{376}(26\sqrt{2}-24\sqrt{3}-10\sqrt{6}+100).$$

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $A=\sqrt{(x+2)^2-8x}:\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

Rezolvare:

Deoarece expresiile de sub radical conțin variabilă, aflăm DVA al expresiei A: $(0, 2)\cup(2, +\infty)$.

Obținem:

$$A=\sqrt{x^2-4x+4}:\frac{x-2}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{(x-2)^2}\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\frac{|x-2|\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\begin{cases}-\sqrt{x}, \text{ dacă } x\in(0, 2)\\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x\in(2, +\infty).\end{cases}$$

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{0{,}0025}$; b) $\sqrt{256\cdot 9\cdot 36}$; c) $\sqrt{\dfrac{25\cdot 324}{529\cdot 49}}$; d) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; e) $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}$.

În cazurile d), e) să se determine aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului obținut, cu o eroare mai mică decît 10^{-2}.

2. Să se scoată factori de sub radical:

a) $\sqrt[4]{32a^4b^3}$; b) $\sqrt{25a^2b^3},\ a<0$; c) $\sqrt{(x-3)^2+12x}$;

d) $\sqrt[3]{x^3y^6}$; e) $\sqrt{169x^3y^2},\ y<0$; f) $\sqrt[4]{8a^5b^6},\ b<0$.

3. Să se introducă factorul sub radical:

a) $-b\sqrt{3},\ b<0$; b) $x\cdot\sqrt{\dfrac{-2}{x}}$; c) $-c\sqrt{7a}$; d) $x\cdot\sqrt[3]{2y}$; e) $a\cdot\sqrt[4]{2a}$;

f) $a\sqrt{3},\ a>0$; g) $y\sqrt{3}$; h) $x\cdot\sqrt{\dfrac{2}{x}}$; i) $x\cdot\sqrt[3]{2xy}$; j) $x\cdot\sqrt[4]{-x}$.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $(2\sqrt{3}+5)(5-2\sqrt{3})+(4-\sqrt{5})^2+8\sqrt{5}$; b) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\dfrac{1}{7}\sqrt{147}$;

c) $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}-\sqrt{15}}$; d) $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$; e) $(1+\sqrt{5})^3\cdot(2+\sqrt{5})$.

5. Să se raționalizeze numitorul raportului:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2y^3}}$; b) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; d) $\dfrac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{18}}$; e) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

B

6. Să se calculeze:

a) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt[6]{27}$; b) $\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}$; c) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$;

d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; e) $\sqrt{12+2\sqrt{6}-2\sqrt{5}-2\sqrt{30}}$.

În cazul e) să se determine aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului obținut, cu o eroare mai mică decît 10^{-3}.

7. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{1300}-2\sqrt{52}-12\sqrt{1\dfrac{4}{9}}+5\sqrt{\dfrac{13}{4}}$; b) $\left(\dfrac{7}{\sqrt{11}-2}+\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}\right)^{-2}:\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\sqrt{16\dfrac{1}{3}}\right)^{-2}$;

c) $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$; d) $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$;

e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$; f) $\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}-6}{1+\sqrt[4]{3}-\sqrt{5}}$; h) $\sqrt{13+\sqrt{48}}$.

8. Să se verifice egalitatea:

a) $\sqrt[3]{26+15\cdot\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=1$; b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

9. S-a vopsit podeaua unei camere de dimensiunile $8{,}45\ \text{m}\times 4\ \text{m}$. Cîte fețe ale unui cub cu muchia de 2,6 m pot fi acoperite cu aceeaşi cantitate de vopsea, consumul de vopsea la 1 m^2 fiind acelaşi?

10*. Să se determine valoarea expresiei $\sqrt{(7-a)(4+a)}$, dacă $\sqrt{7-a}+\sqrt{4+a}=5$.

11*. Pentru $n\le 3m,\ m,\ n\in\mathbb{R}_+$, să se arate că $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.

§ 2 Puterea cu exponent real

1 Cunoaşteți deja noțiunea ***puterea cu exponent întreg***.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*,\ a\in\mathbb{R}^*$, s-a definit: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factori}}$; $a^0=1$; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, iar $0^n=0$.

Observații. **1.** Expresia 0^0 nu este definită.

2. $a^m>0$ pentru $a>0,\ m\in\mathbb{Z}$.

2 *Puterea cu exponent rațional*

În contextul examinării puterii şi a proprietăților ei, apare întrebarea dacă este necesar să se examineze şi puterea cu exponent rațional.

Un argument în favoarea răspunsului pozitiv ar fi cel provenit din necesitățile dezvoltării matematicii: mulțimea $\mathbb{N}$ a fost extinsă pînă la $\mathbb{Z}$, apoi pînă la $\mathbb{Q}$, apoi pînă la $\mathbb{R}$ şi s-au definit operațiile aritmetice în aceste mulțimi.

Alte argumente provin din necesitățile unor discipline. De exemplu, s-a constatat că numărul y al bacteriilor care se înmulțesc într-un anumit mediu se exprimă, în funcție de timpul t, printr-o formulă de tipul $y=a^t$. Fie $t=\dfrac{3}{2}$ ore. Atunci numărul de bacterii, în mediul dat, peste $\dfrac{3}{2}$ ore va fi egal cu $y=a^{\frac{3}{2}}$, adică am obținut o putere cu exponent rațional.

La definirea puterii cu exponent rațional şi irațional, e firesc să cerem să fie adevărate proprietățile pe care le au puterile cu exponenți întregi.

Respectînd această condiție, să dezvăluim esența expresiei $a^{\frac{m}{n}},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $a>0$ obținem $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Deoarece $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$, considerăm că $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Definiție. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}_+^*,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 2$.

Observații. **1.** Pentru $m,n\in\mathbb{N}^*$ se consideră că $0^{\frac{m}{n}}=0$, însă nu are sens expresia $a^{\frac{m}{n}}$, dacă $\dfrac{m}{n}\notin\mathbb{Z}$ şi $a<0$.

Exemplu: $(27)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=\sqrt[3]{9^3}=9$.

2. Pentru diferite reprezentări ale exponentului $\frac{m}{n}$, puterea $a^{\frac{m}{n}}$ se determină în mod unic.

Într-adevăr, dacă $x=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, atunci, aplicînd proprietățile radicalilor, obținem:

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qn]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

3. Puterea cu exponent rațional a unui număr pozitiv este un număr pozitiv, deoarece radicalul de orice ordin dintr-un număr pozitiv este număr pozitiv.

4. Proprietatea $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, fiind adevărată pentru exponent întreg, este adevărată și pentru exponent rațional. Într-adevăr: $a^{\frac{-m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Exercițiu. Arătați că dacă $\frac{m}{n}=k\in\mathbb{Z}$, atunci $a^{\frac{m}{n}}=a^k$.

Teorema ce urmează arată că puterile cu exponent rațional au aceleași proprietăți ca și puterile cu exponent întreg.

Teorema 2 (proprietăți ale puterii cu exponent rațional)

Pentru $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, $x, y\in\mathbb{Q}$, avem:

1° $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; 2° $(a^x)^y=a^{xy}$;

3° $(ab)^x=a^x\cdot b^x$; 4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$; 5° $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

6° a) $a^x>a^y$, dacă $a>1$, $x>y$; b) $a^x<a^y$, dacă $0<a<1$, $x>y$;

7° a) $a^x>b^x$, dacă $a>b$, $x>0$; b) $a^x<b^x$, dacă $a>b$, $x<0$;

8° $(a^x=a^y,\ a\neq 1)\Leftrightarrow x=y$.

Demonstrație:

Vom demonstra proprietățile 1°, 2°, 4° (celelalte se demonstrează în mod analog).

Fie $x=\frac{m}{k}$, $y=\frac{p}{r}$, $m, p\in\mathbb{Z}$, $k, r\in\mathbb{N}^*$. Aplicînd proprietățile radicalilor și puterilor cu exponent întreg, obținem:

1° $a^x\cdot a^y=a^{\frac{m}{k}}\cdot a^{\frac{p}{r}}=\sqrt[k]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^p}=\sqrt[kr]{a^{mr}}\cdot\sqrt[kr]{a^{kp}}=\sqrt[kr]{a^{mr+kp}}=a^{\frac{mr+kp}{kr}}=a^{\frac{m}{k}+\frac{p}{r}}=a^{x+y}$;

2° $(a^x)^y=(a^{\frac{m}{k}})^{\frac{p}{r}}=\sqrt[r]{(\sqrt[k]{a^m})^p}=\sqrt[r]{\sqrt[k]{a^{mp}}}=\sqrt[rk]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{rk}}=a^{xy}$;

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{k}}=\sqrt[k]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[k]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[k]{a^m}}{\sqrt[k]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{k}}}{b^{\frac{m}{k}}}=\frac{a^x}{b^x}$. ▶

Exercițiu. Demonstrați proprietățile 3°, 5°–8°.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine valoarea expresiei numerice $A=2^{-1}(4)^{\frac{5}{2}}\cdot(0,25)^5\cdot 8^2$.

Rezolvare:

$A=2^{-1}(4)^{\frac{5}{2}}\cdot(0,25)^5\cdot 8^2=2^{-1}(2^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(2^{-2})^5\cdot(2^3)^2=2^{-1}\cdot 2^{2\cdot\frac{5}{2}}\cdot 2^{-10}\cdot 2^6=2^{-1+5-10+6}=2^0=1.$

2. Să se compare numerele $(\sqrt[3]{5})^2$ şi $(\sqrt{3})^5$.

Rezolvare:

În baza inegalităților evidente $4<5$, $\sqrt[6]{5}<\sqrt{3}$ şi a proprietăților 6° şi 7°, obținem: $(\sqrt[3]{5})^2=(\sqrt[6]{5})^4<(\sqrt{3})^4<(\sqrt{3})^5$.

3. Să se deschidă parantezele în expresia $A=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$.

Rezolvare:

$$A=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y.$$

4. Să se scrie sub formă de putere expresia $A=(\sqrt{a}\cdot b-b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}$.

Rezolvare:

$$A=(\sqrt{a}\cdot b-b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=(\sqrt{a}\cdot b)^2-2\sqrt{a}\cdot b\cdot b^{\frac{2}{3}}+(b^{\frac{2}{3}})^2+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=$$

$$=ab^2-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}}=(\sqrt{a}\cdot b+b^{\frac{2}{3}})^2.$$

5. Să se simplifice în DVA expresia $B=\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}y}$.

Rezolvare:

$$B=\frac{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}y}=\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{2}{3}}y}=\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

6. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$C=\frac{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2-4\cdot\sqrt[3]{xy}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}+2x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}.$$

Rezolvare:

Pentru a aduce la forma cea mai simplă expresia C, descompunem în produs numitorii şi numărătorii rapoartelor: $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})$; $x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$;

$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^2-4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2$.

Produsul primelor două rapoarte ale expresiei C devine:

$$\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})}=\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})((x^{\frac{1}{6}})^2-(y^{\frac{1}{6}})^2)}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}})}=\frac{(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}})}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Astfel, obținem: $C=\dfrac{x^{\frac{2}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{2}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{3}}}.$

3 ***Puterea cu exponent irațional a unui număr pozitiv*** se defineşte utilizînd aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale numerelor iraționale (a se vedea modulul 1). Se ştie că pentru orice număr irațional x există numerele raționale x_n, x'_n, astfel încît $x_n < x < x'_n$, $x'_n - x_n = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definiție. Se numeşte **putere cu exponentul irațional** x a numărului a, $a > 1$ $(0 < a < 1)$, şi se notează a^x, un număr real t care pentru orice număr natural n satisface inegalitățile duble $a^{x_n} < t < a^{x'_n}$ $(a^{x'_n} < t < a^{x_n})$, x_n, x'_n fiind aproximările zecimale ale lui x prin lipsă şi respectiv prin adaos.

Prin definiție, se consideră că $1^x = 1$ pentru orice număr irațional x.

Exercițiu rezolvat

Ce se înțelege prin numărul:

a) $5^{\sqrt{2}}$; b) $(0,1)^{\sqrt{2}}$?

Rezolvare:

a) Pentru $\sqrt{2}$ sînt cunoscute aproximările zecimale:

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5; \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42; \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415; \ \ldots$$

Prin urmare, $t = 5^{\sqrt{2}}$ este acel unic număr care satisface inegalitățile duble:

$$5^1 < t < 5^2; \quad 5^{1,4} < t < 5^{1,5}; \quad 5^{1,41} < t < 5^{1,42}; \quad 5^{1,414} < t < 5^{1,415}; \ \ldots$$

b) $s = (0,1)^{\sqrt{2}}$ este acel unic număr care satisface inegalitățile duble:

$$(0,1)^2 < s < (0,1)^1; \ (0,1)^{1,5} < s < (0,1)^{1,4}; \ (0,1)^{1,42} < s < (0,1)^{1,41}; \ (0,1)^{1,415} < s < (0,1)^{1,414}; \ \ldots$$

4 ***Puterea cu exponent real a unui număr pozitiv*** posedă aceleaşi proprietăți ca şi cea cu exponent rațional. Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1° din teorema 2.

Demonstrație:

Din inegalitățile duble $x_n \le x < x'_n$ şi $y_n \le y < y'_n$, unde x_n, x'_n, y_n, y'_n sînt aproximările zecimale ale numerelor reale x, y, obținem $x_n + y_n \le x + y < x'_n + y'_n$ şi pentru $a > 1$ avem $a^{x_n} \le a^x < a^{x'_n}$, $a^{y_n} \le a^y < a^{y'_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Înmulțind membru cu membru aceste inegalități, obținem $a^{x_n} a^{y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n} a^{y'_n}$, sau $a^{x_n + y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n + y'_n}$. Întrucît a^{x+y} de asemenea trebuie să satisfacă ultima inegalitate dublă pentru $n \in \mathbb{N}$, în baza unicității numărului ce satisface aceste inegalități, rezultă că $a^x a^y = a^{x+y}$. ▶

Observații. **1.** Puterea cu exponent irațional a numărului $a \le 0$ nu se defineşte.

2. Oricare ar fi $a > 0$ şi x real, rezultă că $a^x > 0$, întrucît a^x este cuprins între două puteri cu exponenți raționali ale lui a, care, conform celor menționate anterior, sînt pozitive.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}$.

Rezolvare:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-9}=(2^{-1})^{-9}=2^9=512.$$

2. Să se compare numerele reale x şi y, dacă se ştie că $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^x \geq (\sqrt{7}-\sqrt{5})^y$.

Rezolvare:

Fiind date două puteri cu aceeaşi bază, vom stabili dacă această bază este mai mare sau mai mică decît 1. Cum $2<\sqrt{7}<3,\ 2<\sqrt{5}<3,\ \sqrt{7}>\sqrt{5}$, obținem că $0<\sqrt{7}-\sqrt{5}<1$. În baza proprietății 6° din teorema 2, rezultă că $x \leq y$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ ecuația $x^{\sqrt{2}}=7$.

Rezolvare:

Deoarece exponentul puterii este număr irațional, rezultă că x trebuie să fie număr pozitiv. Obținem: $(x^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=7^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow x=7^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Răspuns: $S=\{7^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\}$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+$ inecuația $x^{\sqrt{3}}>x^2$.

Rezolvare:

Ca şi în exercițiul 3, x ia numai valori pozitive. Cum baza puterilor este aceeaşi, vom compara exponenții. Deoarece $\sqrt{3}<2$, în baza proprietății 7°, obținem că $0<x<1$.

Răspuns: $S=(0, 1)$.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $3^{-1}\cdot 5+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; b) $\frac{9}{9{,}28\cdot 10^{-5}-2{,}8\cdot 10^{-6}}$; c) $\frac{0{,}04^{-2}\cdot 25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{2\cdot 5^4}$;

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^{4}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}\cdot\left(\frac{1}{625}\right)^{3}$; e) $(2{,}73)^0\cdot(0{,}4)^{-2}\cdot(2{,}5)^2$; f) $\frac{3\cdot 7^{-1}\cdot\frac{7}{4}}{(0{,}5)^2\cdot 3^{-1}}$.

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; b) $\frac{x+2x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; c) $\frac{a-4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$; d) $\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$;

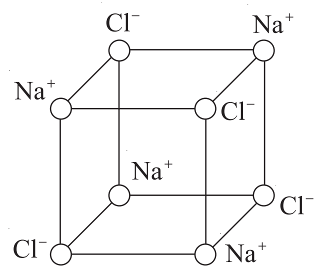
e) $\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4$; f) $(3^{-1})^6\cdot 9^{\sqrt{3}}(9^{-1})^{\sqrt{27}}$; g) $\left((27)^{-1\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{8}}$.

3. Să se compare cu 1:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{\pi}}$; c) $(\pi-3)^{-\sqrt{3}}$.

4. Prețul unui produs era de 100 u.m., iar după două majorări succesive cu același număr de procente a devenit de 125,44 u.m. Cu cîte procente s-a majorat prețul de fiecare dată?

5. Rețeaua cristalină a sării de bucătărie (NaCl) constă din 4 ioni de natriu (Na^+) și 4 ioni de clor (Cl^-), aranjați în vîrfurile unui cub avînd diagonala feței egală cu $4\cdot10^{-8}$ cm. Cîte cubulețe de acest fel sînt (aproximativ) într-un bob de sare ce are volumul de 0,1 mm^3?



6. Să se determine x, dacă o latură a dreptunghiului este egală cu $x^{\frac{3}{2}}$ cm, cealaltă – cu x^2 cm, iar aria dreptunghiului este de 15 cm^2.

B

7. Să se calculeze:

a) $\frac{2\cdot5^{20}-9\cdot5^{19}}{5^{18}}$; b) $4^{-1}\cdot(0{,}34)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}5}\cdot(6{,}25)^{0{,}5}$;

c) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot(0{,}3)^{-1}\cdot(7)^0\cdot(0{,}1)^{-4}$; d) $\frac{(0{,}2)^{-1}\cdot5^4\cdot25^4\cdot(0{,}2)^{-4}}{4\cdot5^2}$.

8. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia (în DVA respectiv):

a) $\frac{a^{\frac13}+b^{\frac13}}{a^{\frac23}-a^{\frac13}b^{\frac13}+b^{\frac23}}-\frac{a^{\frac23}+2a^{\frac13}b^{\frac13}}{a+b}$; b) $\left(1-\frac{x^{-3}-1}{x^{-1}-1}:\frac{1+x+x^2}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x^{-\frac12}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right)$;

c) $\left(\frac{x^{\frac12}+3y^{\frac12}}{x-2x^{\frac12}y^{\frac12}+y}+\frac{x^{\frac12}-3y^{\frac12}}{x-y}\right)\cdot\frac{x^{\frac12}-y^{\frac12}}{2}$; d) $\frac{\left(x^{\frac23}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac23}\right)}{\left(x^{\frac43}-8y\cdot\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$;

e) $\frac{m^5+m^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$; f) $\left((\sqrt{7})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$; g) $\frac{75^{\sqrt{48}}}{25^{\sqrt{108}}}\cdot\frac{5^{27\sqrt{3}}}{15^{\sqrt{27}}}$.

9. Să se compare cu 1:

a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-\frac12}$; b) $(\sqrt{7}-1)^{\frac13}$; c) $(\sqrt{3}-1)^{\frac72}$; d) $\left(\frac{2}{7}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

10*. Să se verifice egalitatea:

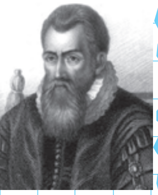
a) $((x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2)(x^4-x^2\sqrt{2}+1)^{-1}+x^2\sqrt{2})^{\frac12}=x^2+\sqrt{2}$;

b) $(x+2(x-1)^{\frac12})^{\frac12}+(x-2(x-1)^{\frac12})^{\frac12}=2$, dacă $1\le x\le 2$.

11*. Să se arate că diferența dintre orice număr întreg de 4 cifre și numărul exprimat prin aceleași cifre, însă scrise în ordine inversă, este divizibilă cu 9.

§ 3 Logaritmi

*Logaritmii au fost definiți de savantul scoțian **John Napier** (1550–1617). El a descoperit că înmulțirea și împărțirea numerelor se pot efectua prin adunarea, respectiv prin scăderea logaritmilor acestor numere. J. Kepler, de exemplu, utiliza logaritmi în baza 10 pentru efectuarea unor calcule complicate în domeniul astronomiei. Astăzi, este greu de găsit un domeniu al științei în care să nu se utilizeze logaritmii.*



3.1. Noțiunea de logaritm

În paragraful precedent a fost definită puterea c a unui număr real pozitiv a cu exponent real arbitrar b, astfel încît $a^b = c,\ c > 0$. În legătură cu aceasta, se formulează două probleme:

1) să se determine numărul a, fiind date numărul real b și numărul pozitiv c;

2) să se determine numărul b, fiind cunoscute numerele $c,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$.

Prima problemă (pentru $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$) a servit ca temei pentru a defini noțiunea *radical*.

Cea de-a doua problemă a servit drept motiv pentru a defini noțiunea *logaritm*.

Vom enunța fără demonstrație

Teorema 3. Pentru orice numere reale pozitive $a, c, a \neq 1$, există un unic număr real b care satisface egalitatea $a^b = c$.

Observație. Unicitatea numărului b rezultă din proprietatea 8° a puterii.

Definiție. Se numește **logaritmul** numărului pozitiv c în baza $a,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$, numărul real b pentru care $a^b = c$.

Se notează: $\log_a c = b$.

Prin urmare, $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$ (1). Substituind b în egalitatea (1) se obține ***identitatea logaritmică fundamentală***:

$$\boxed{a^{\log_a c} = c}.$$

Exemplu

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, deoarece $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$.

Rezolvare:

Notăm $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \alpha$. În baza definiției logaritmului, $(\sqrt{3})^\alpha = \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$, de unde $3^{\frac{\alpha}{2}} = 3^{\frac{2}{3}}$.

Egalînd exponenții, obținem $\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$.

2. Să se determine numerele reale x, astfel încît să aibă sens expresia $\log_x(3-x)$.

Rezolvare:

În baza definiției logaritmului, $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,3).$

***Observații.* 1.** Condiția $a\neq 1$ este necesară, fiindcă, în caz contrar, conform definiției logaritmului, $1^b=1$ pentru orice $b\in\mathbb{R}$ şi, astfel, numărul b este nedeterminat.

2. Condiția ca a şi c să fie numere pozitive este impusă de conceptul *putere cu exponent real* şi de faptul că această putere ia numai valori pozitive. Astfel, expresiile de tipul $\log_3(-6)$, $\log_{(-3)}9$ nu au sens.

3. În unele cazuri, în calcule se folosesc ***logaritmii zecimali*** (se notează $\mathbf{lg}\,c=\log_{10}c$, $c>0$) şi/sau ***logaritmii naturali*** (se notează $\mathbf{ln}\,c=\log_e c$, $c>0$, unde e = 2,7182... este un număr irațional, care va fi definit ulterior).

4. La noțiunea de logaritm al unui număr se va reveni în modulul 7.

3.2. Proprietățile logaritmilor

Teorema 4 (proprietăți ale logaritmilor)

Pentru $a, c, x, y\in\mathbb{R}_+^*$, $a\neq 1$, $c\neq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, avem:

1° $\log_a a=1$;

2° $\log_a 1=0$;

3° $a^{\log_a x}=x$ (*identitatea logaritmică fundamentală*);

4° $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;

5° $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

6° $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$;

7° $\log_{a^\alpha} x=\dfrac{1}{\alpha}\log_a x$ $(\alpha\neq 0)$;

8° $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$;

9° $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x=\log_a y\Rightarrow x=y$.

Observație. Proprietățile 4°–7° pot fi generalizate prin proprietățile 11°–14° în cazurile în care expresiile din membrul stîng au sens şi pentru valorile negative ale variabilelor; de exemplu, $\log_a(-3)^4$.

Teorema 4 (proprietăți ale logaritmilor, generalizare)

Pentru $x\in\mathbb{R}_+^*$, $u, v\in\mathbb{R}_-^*$, $\alpha=2k$, $k=\mathbb{Z}^*$, au loc egalitățile:

11° $\log_a(uv)=\log_a|u|+\log_a|v|$;

12° $\log_a\dfrac{u}{v}=\log_a|u|-\log_a|v|$;

13° $\log_a u^\alpha=\alpha\log_a|u|$;

14° $\log_{u^\alpha} x=\dfrac{1}{\alpha}\log_{|u|} x$.

Demonstrație:

Proprietățile 1° şi 2° rezultă din egalitățile $a^1=a$ şi respectiv $a^0=1$.

3° Fie $a^b=x$, $a\neq 1$, atunci $b=\log_a x$. Substituind b în prima egalitate, obținem $a^{\log_a x}=x$.

4° Aplicînd proprietatea 3°, obținem $a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. În baza proprietății 8° a puterii, rezultă că $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Proprietățile 5° şi 6° se demonstrează în mod analog cu proprietatea 4°.

7° $(a^\alpha)^{\log_{a^\alpha} x} = x = a^{\log_a x} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\log_a x}$, deci $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{\alpha}\log_a x$.

8° $a^{\log_a x} = x = c^{\log_c x} = c^{\log_c a \cdot \frac{\log_c x}{\log_c a}} = (c^{\log_c a})^{\frac{\log_c x}{\log_c a}} = a^{\frac{\log_c x}{\log_c a}}$. Egalînd exponenții, obținem proprietatea respectivă.

Proprietatea 9° rezultă din proprietatea 8°, înlocuind $x = c$ şi ținînd cont că $\log_c c = 1$.

Proprietățile 11°–14° rezultă din proprietățile 4°–7°, substituind uv cu $|uv|$, $\dfrac{u}{v}$ cu $\left|\dfrac{u}{v}\right|$, u^α cu $|u|^\alpha$. ▶

Exerciții rezolvate

1. Aplicînd proprietățile logaritmilor, putem calcula în alt mod logaritmul din exercițiul rezolvat 1 de la pagina 38: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = \dfrac{4}{3}$.

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$A = \log_2 2x^2 + \log_2 x \cdot x^{\log_x(\log_2 x + 1)} + \frac{1}{2}\log_4^2 x^4 + 2^{-3\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)}.$$

Rezolvare:

Utilizăm proprietățile logaritmilor şi exprimăm termenii expresiei A prin logaritmi în baza 2 $(x > 0,\ x \neq 1)$: $\log_2 2x^2 = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2\log_2 x$; $x^{\log_x(\log_2 x + 1)} = \log_2 x + 1$;

$(\log_{2^2} x^4)^2 = \left(\dfrac{4}{2}\log_2 x\right)^2 = 4\log_2^2 x$; $\quad 2^{-3\log_{2^{-1}}(\log_2 x)} = 2^{3\log_2(\log_2 x)} = 2^{\log_2(\log_2 x)^3} = \log_2^3 x$.

Atunci $A = \log_2 2 + \log_2 x^2 + \log_2 x \cdot (\log_2 x + 1) + \dfrac{1}{2}(\log_{2^2} x^4)^2 + 2^{-3\log_{2^{-1}}(\log_2 x)} =$

$= 1 + 3\log_2 x + \log_2^2 x + 2\log_2^2 x + 2^{\log_2(\log_2 x)^3} = 1 + 3\log_2 x + 3\log_2^2 x + \log_2^3 x = (1 + \log_2 x)^3$.

Operația prin care unei expresii E i se asociază $\log_a E$, $a > 0$, $a \neq 1$, se numeşte ***operație de logaritmare***, iar operația inversă acesteia (scrierea expresiei, fiind dat logaritmul ei) se numeşte ***operație de potențiere***.

Observații. **1.** În baza proprietății 10°, rezultă că sînt echivalente egalitățile $\log_a b = \log_a c$ şi $b = c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.

2. Compararea logaritmilor cu aceeaşi bază se efectuează astfel: dacă $c > 1$, atunci $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a < b$, iar dacă $0 < c < 1$, atunci $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^{\log_2 x} = 4$.

Rezolvare:

DVA: $x \in (0, +\infty)$.

Logaritmînd ambii membri şi aplicînd proprietăţile logaritmilor, obţinem:

$$\log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 4 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 2 \Leftrightarrow |\log_2 x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -\sqrt{2},\\ \log_2 x = \sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Prin potenţiere, obţinem: $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$.

Răspuns: $S = \{2^{-\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{2}}\}$.

2. Să se compare $\log_2 3$ cu 1,5.

Rezolvare:

Presupunînd că $\log_2 3 < 1{,}5$, prin potenţiere, în baza proprietăţilor puterii, obţinem $2^{\log_2 3} < 2^{1{,}5} \Leftrightarrow 3 < 2^{1{,}5}$. Ultima inegalitate este falsă, fiindcă $2^{1{,}5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} < 3$. Deci, adevărat este că $\log_2 3 > 1{,}5$.

Observaţie. În baza proprietăţilor 3° şi 6°, orice număr pozitiv se poate reprezenta ca putere a oricărui alt număr pozitiv sau ca logaritmul unui număr pozitiv în orice bază pozitivă diferită de 1. Într-adevăr, $a = c^{\log_c a} = \log_c c^a$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $c \neq 1$. Aceste reprezentări sînt utile în diverse situaţii: la rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor ş.a.

Exerciţii şi probleme propuse

A

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $25^{\log_5 3}$; b) $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$; c) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$; d) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$; e) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$.

2. Prin potenţiere, să se determine *x*, dacă $\lg x = 2\lg 5 - 3\lg 2 - 0{,}5\lg 625 + 0{,}25\lg 256$.

3. Să se determine $\lg 56$, dacă $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.

5. Să se arate că $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = 24$.

6. Să se ordoneze crescător numerele $\log_2 3$, 1, $\log_2 5$.

7. Efectuînd potenţierea, să se arate că $\log_3 2 > 0{,}5$.

B

8. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\log_2 ab - \log_2 |b|$;

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$;

c) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;

d) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

e) $(6(\log_b a \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$;

f) $\left(a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$;

g) $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot (\log_n p - \log_{np} p)\sqrt{\log_n p}$;

h*) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$.

9. Prin potențiere, să se determine x, dacă $\log_5 x = 2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2.$

10. Pentru valorile admisibile ale variabilelor, să se arate că:

a) $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b;$ b) $\lg\frac{|a+b|}{3} = \frac{\lg|a| + \lg|b|}{2}$, dacă $a^2 + b^2 = 7ab;$

c) $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c};$ d) $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}} = \lg a.$

11. Să se determine:

a) $\log_{30} 8$, dacă $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b;$ b) $\log_{54} 168$, dacă $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b.$

12. Efectuînd potențierea și utilizînd proprietățile puterilor, să se arate că are loc inegalitatea dublă $0{,}6 < \log_3 2 < 0{,}7.$

13*. Știind că $4^a + 4^{-a} = 23$, să se determine valoarea expresiei $2^a + 2^{-a}$.

14*. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \log_{a-b} m$, dacă $m^2 = a^2 - b^2$.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt[5]{1024};$ b) $\log_{\sqrt{3}} 4 + \log_3 \frac{9}{2};$

c) $5\sqrt[3]{0{,}027} - (\sqrt[4]{0{,}0016})^{-2};$ d) $((0{,}6)^{-4})^{-0{,}75} \cdot (0{,}09)^{-2^{-1}} \cdot 0{,}1^{-4}.$

2. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

a) $7\sqrt{2} > 2\sqrt{7};$ b) $\log_{\sqrt{3}} 2 < \log_{\sqrt{3}} 0{,}5;$

c) $\sqrt{3} + 1 = \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}};$ d) $\log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = 2;$ e) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}} = x^{\frac{1}{30}}$, $x \geq 0;$

f) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+;$ g) $\log_\pi (xy) = \log_\pi |x| + \log_\pi y$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+.$

3. Să se calculeze: a) $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{125} + \sqrt{3} - 6\sqrt{5});$ b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}5^{-3} : 4.$

4. Să se aducă la forma cea mai simplă:

a) $\left(\frac{1}{2x-1} + 2x + 1\right) : \left(2x + \frac{4x^2}{1-2x}\right);$ b) $\log_3 5 \log_4 9 \log_5 2.$

5. Să se compare numerele: a) $\sqrt[6]{35}$ și $\sqrt[7]{35};$ b) $(\sqrt{5})^{16}$ și $\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}.$

6. Să se raționalizeze numitorul raportului:

a) $\frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}};$ b) $\frac{1}{x + \sqrt{y}};$ c) $\frac{4}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}};$ d) $\frac{1}{3 - \sqrt{2} - \sqrt{5}}.$

7. La o stațiune balneară, într-un bazin de forma unui paralelipiped cu dimensiunile bazei de 2,0 m și 2,24 m se toarnă apă curativă pînă la nivelul de 1,77 m. Apa se aduce în vase de formă cubică. Sînt disponibile vase cu muchia de: 1,9 m, 1,95 m, 2,0 m, 2,05 m, ... Care este lungimea muchiei celui mai mic vas, astfel încît cu apa din el să se umple bazinul maxim posibil, fără a depăși nivelul preconizat?

8. Cineva afirmă că $3<2$, întrucît din $(0,5)^3<(0,5)^2$ rezultă consecutiv:

$$\lg(0,5)^3<\lg(0,5)^2,\ 3\lg 0,5<2\lg 0,5,\ 3<2.$$

Unde s-a comis greşeala?

B

9. Să se arate că:

a) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$, dacă $x\le 2$;

b) $\log_c\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)$, dacă $a^2+b^2=7ab$.

10. Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) $3+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$;

b) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9\sqrt{18}-9\sqrt{12}-3}$.

11. Să se aducă la forma cea mai simplă (pentru valorile admisibile ale variabilelor):

a) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-16^{-0,25})(16^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}})$;

b) $3^{\frac{1}{\log_5\sqrt{3}}}-9^{\log_3 5}-3^{\log_9 36}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt[6]{a^3b^2}}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^3b}+\dfrac{b\sqrt{a}-a^2}{\sqrt[3]{b}-\sqrt{a}}}$;

d) $\log_{\sqrt{6}}(a^3-2)+\log_6(a-2)+\log_{\frac{1}{6}}(a-2)$.

12. Să se compare:

a) $\log_{0,3}\left(\dfrac{11}{6}\log_2 6-\dfrac{11}{6}\right)$ cu 0;

b) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$ cu $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^5}}}$ cu $\sqrt[6]{\sqrt[4]{\sqrt{8^4}}}$;

d) $\log_{\sqrt{2}}7$ cu $\log_{0,2}3$.

13. Pentru care valori ale lui a are loc egalitatea $\log_b a^2=2\log_b(-a)$?

14*. Să se calculeze $\log_{\sqrt{3}}8$, dacă $\log_{12}3=a$.

15*. Să se determine numărul natural n pentru care are loc egalitatea $3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3n-1}=27^5$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru: 90 de minute

A

În itemii 1, 8 indicaţi litera care corespunde variantei corecte.

1. Toate valorile variabilelor a, b pentru care $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ aparţin mulţimii 1

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}_+^*$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Comparaţi numerele $3\sqrt{7}$ şi $7\sqrt{3}$. 1

3. Calculaţi $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{1,6}+3\sqrt{0,4})$. 1

4. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$. 1

5. Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: 1

a) $8^{\frac{2}{3}}=4^2$;

b) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$.

6. Scrieți în ordine descrescătoare numerele $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$. 1

7. Raționalizați numitorul raportului $\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. 1

8. Valoarea expresiei $\left((\sqrt{8})^{-\frac{13}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$ este 1

A mai mare decît 1. **B** mai mică decît 1. **C** egală cu 1.

9. Calculați $81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\log_9 16}+3^{\frac{2}{\log_7 9}}$. 1

10. Determinați valorile admisibile ale variabilelor și aduceți la forma cea mai simplă expresia: 1

$$a^{\frac{2}{\log_b a}+1}\cdot b-2a^{\log_a b+1}\cdot b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}.$$

B

În itemii 1, 8 indicați litera care corespunde variantei corecte.

1. Toate valorile variabilelor a, b pentru care $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b},\ n\in\mathbb{N}^*$, aparțin mulțimii 1

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}_+^*$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Comparați $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$ cu $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. 1

3. Calculați $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$. 1

4. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}-\sqrt[4]{xy^4}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{x^5}}$. 1

5. Determinați valoarea de adevăr a propoziției: 1

a) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{5}{6}}$; b) $\left((-2)^{\frac{3}{4}}\right)^2=2^{\frac{3}{2}}$.

6. Scrieți în ordine crescătoare numerele $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}, \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$. 1

7. Raționalizați numitorul raportului $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$. 1

8. Valoarea expresiei $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^3$ este 1

A mai mare decît 1. **B** mai mică decît 1. **C** egală cu 1.

9. Calculați $-\log_2\sqrt{\sqrt[5]{\log_4\sqrt{256}}}$. 1

10. Determinați valorile admisibile ale variabilei a și aduceți la forma cea mai simplă expresia: 1

$$\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-a-1\right).$$

Radicali. Puteri. Logaritmi

$a^b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Determinarea lui c | Determinarea lui a, dacă $b = n \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$ | Determinarea lui b

Puteri

Definiții

1) $b = n,\ n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1\ (a \neq 0)$, $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$;

2) $b = -n$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$;

3) $b = \frac{m}{k}$: $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$;

4) $b = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a > 1$, $a^{x_k} \leq a^{\alpha} \leq a^{y_k}$;

$0 < a < 1$, $a^{y_k} \leq a^{\alpha} \leq a^{x_k}$, unde x_k, y_k sînt aproximările zecimale ale numărului α;

$0^{\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proprietăți

Pentru $x, y \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2° $(a^x)^y = a^{xy}$;

3° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

5° $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Radicali

Definiții

1) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow a^n = c$, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$;

2) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = c, \\ a > 0, \end{cases}$ $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăți

Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+$ (proprietățile 1°–5°), avem:

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;.

3° $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

4° $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$;

5° $\sqrt{a^2} = |a|$;

6° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+^*$;

7° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$, $ab \geq 0$;

8° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, $ab \geq 0$, $b \neq 0$;

9° $\sqrt[mk]{a^k} = \sqrt[m]{|a|}$, k par.

Logaritmi

Definiții

$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$, $c, a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

$\lg c = \log_{10} c$ – logaritmi zecimali;

$\ln c = \log_e c$ – logaritmi naturali,

unde $e \approx 2{,}71\ldots$

Proprietăți

Pentru $a, c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ (proprietățile 1°–9°), avem:

1° $\log_a a = 1$; 2° $\log_a 1 = 0$; 3° $a^{\log_a c} = c$;

4° $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

5° $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

6° $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$;

7° $\log_{a^{\alpha}} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$, $\alpha \neq 0$;

8° $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$; 9° $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \neq 0$;

11° $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$;

12° $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$, $xy > 0$.

MODULUL 4

Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

Isaac Newton

Învăţătura – ca aurul – are preţ oriunde.
Epictet

Obiective

- identificarea noţiunilor *mulţime ordonată*, *factorial*, *aranjamente*, *permutări*, *combinări de elemente ale unor mulţimi numerice finite*;
- utilizarea aranjamentelor, permutărilor, combinărilor şi a proprietăţilor acestora în rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor, problemelor simple din viaţa cotidiană;
- *aplicarea binomului lui Newton sau/şi a formulei termenului general în situaţii reale sau modelate;
- *folosirea proprietăţilor coeficienţilor binomiali şi ale dezvoltării binomului la putere la rezolvarea problemelor.

§ 1 Elemente de combinatorică

1.1. Mulţimi ordonate

Problema 1. E necesar de a asigura cele 150 000 de apartamente noi cu numere de telefonie fixă, fiecare număr fiind format din şase cifre distincte. Se va reuşi, oare, dacă se ştie că numărul de telefon poate să înceapă şi cu 0?

Problema 2. La o sesiune de comunicări s-au înregistrat 7 referate. În cîte moduri se poate face programarea susţinerii lor?

Problema 3. În clasa a X-a învaţă 24 de elevi. În fiecare zi, o echipă formată din 3 elevi face de serviciu. În cîte moduri poate fi formată această echipă?

Observăm că în aceste tipuri de probleme se solicită aranjarea într-o ordine specială a elementelor unei mulţimi finite, determinarea dintr-o mulţime finită de elemente a numărului de submulţimi de elemente care posedă anumite proprietăţi, realizarea unei oarecare combinaţii de elemente etc. Domeniul matematicii care studiază astfel de probleme se numeşte ***combinatorică***. Atare probleme se numesc ***probleme de combinatorică***.

Probleme de combinatorică apar atît în viaţa cotidiană, cît şi în diverse domenii ale ştiinţei şi tehnicii: la studiul teoriei probabilităţilor, teoriei numerelor, logicii matematice, informaticii, fizicii, chimiei etc. În unele cazuri, vom căuta cel puţin o soluţie a problemei, în altele – toate soluţiile ei sau soluţia optimă, sau numai numărul de soluţii etc. Pentru unele

Leonard Euler

probleme de combinatorică se va demonstra că ele nu au soluții. De exemplu, *Leonard Euler* (1707–1783) a formulat problema, iar mai tîrziu s-a demonstrat că nu e posibil de aranjat 36 de ofițeri, care au 6 tipuri de grade militare vizînd 6 categorii de trupe militare (cîte un ofițer cu gradul respectiv din trupa militară respectivă), pe 36 de pătrățele ale unui careu (6×6), astfel încît în fiecare linie și în fiecare coloană să fie reprezentate toate categoriile de trupe militare și toate tipurile de grade militare.

În figura 4.1 este reprezentată o secvență din soluția acestei probleme pentru 4 categorii de trupe militare (A, B, C, D) și pentru 4 tipuri de grade militare (a, b, c, d). *Completați tabelul și finisați rezolvarea.*

Aa	*Bd*		*Dc*
	Ac	*Da*	*Cd*
Cc		*Ad*	
	Ca	*Bc*	*Ab*

Fig. 4.1

Probleme de combinatorică apar și în jocurile sportive. În special, ele sînt frecvente în jocurile de șah și dame.

În continuare vom studia probleme simple de combinatorică (fără repetarea elementelor).

Vom considera mulțimi numerice finite. În special, vom lucra cu mulțimi ordonate. Fiecare mulțime are o structură internă, care include atît elementele ei, cît și ordinea de amplasare a acestora. Elementele unei mulțimi pot fi ordonate în diverse moduri. De exemplu, elementele mulțimii $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ pot fi aranjate astfel: $\{a_4, a_3, a_2, a_1\}$, $\{a_2, a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4, a_3\}$ etc. Fiecare din aceste mulțimi, deși conține aceleași elemente, diferă prin ordinea de dispunere a acestora.

Definiție. Mulțimea finită $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se numește **mulțime ordonată** dacă elementele ei sînt aranjate într-o ordine bine determinată. Cu alte cuvinte, mulțimea M se numește **ordonată** dacă fiecărui element al ei i se asociază un anumit număr natural de la 1 la n, astfel încît elementelor diferite ale lui M le corespund numere diferite.

Una și aceeași mulțime finită poate fi ordonată în diverse moduri. De exemplu, mulțimea elevilor din clasa a X-a poate fi ordonată după înălțimea elevilor (crescător sau descrescător), după masa corporală (crescător sau descrescător) sau în ordinea alfabetică a numelor lor.

***Observații.* 1.** S-a convenit ca mulțimile ordonate, obținute din mulțimea dată, să se scrie între paranteze rotunde.

Exemplu

$\{1, 2, 3\}$

$(1, 2, 3)$ $(1, 3, 2)$ $(3, 2, 1)$ $(2, 3, 1)$ $(2, 1, 3)$ $(3, 1, 2)$

2. Două mulțimi ordonate sînt ***egale*** dacă conțin aceleași elemente și au aceeași ordine de dispunere a acestora.

Exemplu

Mulțimile ordonate (a, b, c, d) și (a, b, c, e) sînt diferite. De asemenea, sînt diferite mulțimile ordonate $(8, 9, 10)$ și $(8, 10, 9)$.

Produsul primelor n numere naturale nenule se notează cu $n!$, adică
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Notația $n!$ se citește „en factorial”.

Exemple

$1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Observație. Prin definiție, considerăm că $\boxed{0! = 1.}$

Mai tîrziu, vom argumenta această definiție. În particular,

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{pentru } n \geq 1 \text{ sau}$$
$$n! = (n-2)! \cdot (n-1)n \quad \text{pentru } n \geq 2, \text{ sau}$$
$$n! = (n-3)! \cdot (n-2)(n-1)n \quad \text{pentru } n \geq 3, \text{ sau}$$
$$n! = (n-4)! \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \quad \text{pentru } n \geq 4 \text{ ş.a.m.d.}$$

Exemple

1. $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 90.$

2. $\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)! \cdot (n-1)}{(n-2)!} = n-1.$

3. $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!} = \dfrac{(2n-1)! \cdot 2n}{(2n-1)!} = 2n.$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația $\dfrac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2).$

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} n+2 \geq 0 \\ n-1 \geq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 1, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

În DVA avem:

$$\frac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 30(n+2) \Leftrightarrow n(n+1) = 30 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -6 \notin \text{DVA}, \\ n = 5 \in \text{DVA}. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \{5\}$.

1.2. Aranjamente

Fie mulțimea $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, $\operatorname{card} M = n$.

Luăm m elemente oarecare din cele n $(0 \leq m \leq n)$ ale mulțimii M şi formăm diferite mulțimi ordonate.

Definiție. Submulțimile ordonate ale mulțimii M, $\operatorname{card} M = n$, avînd fiecare cîte m elemente, unde $0 \leq m \leq n$, se numesc **aranjamente de *n* elemente luate cîte *m*.**

Numărul de aranjamente de n elemente luate cîte m se notează A_n^m.

Prin definiție, considerăm că $A_n^0 = 1$.

Exercițiu rezolvat

Fie mulțimea $B = \{0, 2, 3\}$. Să se calculeze numărul A_3^2.

Rezolvare:

Din trei elemente 0, 2, 3 $(n = 3)$, luate cîte două elemente $(m = 2)$, se pot forma 6 submulțimi ordonate: (0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (2, 3), (3, 2). Aşadar, $A_3^2 = 6$.

Să calculăm numărul de aranjamente a n elemente luate cîte m, adică să găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^m.

Evident că $A_n^1 = n$. Un element din n elemente date poate fi ales în n moduri, iar cu un element se poate forma numai o mulțime ordonată.

Pentru a repartiza oricare $m+1$ elemente, luate din n elemente date, pe $m+1$ locuri, se pot lua mai întîi oricare m elemente şi aranja pe primele m locuri. Aceasta se poate realiza în A_n^m moduri. De fiecare dată, la o astfel de selectare a m elemente din cele n date, rămîn $n-m$ elemente, fiecare dintre ele putînd fi puse pe locul al $(m+1)$-lea. Deci, pentru fiecare din cele A_n^m moduri de aranjare a elementelor pe primele m locuri, obținem $(n-m)$ posibilități prin care al $(m+1)$-lea loc este ocupat de unul dintre cele $(n-m)$ elemente rămase. De aici rezultă că $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. Luînd în considerație că $A_n^1 = n$, obținem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),$$
$$A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$
$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3),\ \ldots,$$
$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1).$$

Astfel, am demonstrat

Teorema 1. Dacă m şi n sînt numere naturale, astfel încît $0 < m < n$, atunci
$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

În practică, e mai comod să aplicăm o altă formulă pentru calculul numărului A_n^m.

Cum $n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1) = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)\times$
$\times\dfrac{(n-m)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, obținem:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.} \qquad (1)$$

Pentru $m = 0$ formula (1) dă $A_n^0 = 1$, iar pentru $m = n$ din (1) obținem $A_n^n = n!$. Aşadar, teorema 1 şi formula (1) sînt adevărate pentru orice m şi n, unde $0 \le m \le n$.

Deci, problema 1 din secvența 1.1 se rezolvă astfel:

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!} = 151\,200.$$

Prin urmare, sînt posibile 151 200 de numere de telefon de tipul menționat, iar răspunsul este afirmativ.

1.3. Permutări

Problema 4. Fie mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$. Să se calculeze numărul A_3^3.

Rezolvare:

Din elementele 0, 2, 3, luate cîte trei, se pot forma 6 submulțimi ordonate:

$$(0, 2, 3), (0, 3, 2), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 0, 3).$$

Deci, $A_3^3 = 6 = 1\cdot 2\cdot 3 = 3!$.

Observăm că aceste aranjamente se obțin la schimbarea locurilor celor trei elemente date. Astfel, am obținut nişte permutări.

Definiție. Aranjamentele de n elemente luate cîte n ale mulțimii $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\operatorname{card} M = n$, se numesc **permutări de n elemente** ale acestei mulțimi.

Numărul de permutări de n elemente se notează P_n.

Ținînd cont că $A_n^n = n!$, în baza definiției permutărilor, obținem:

$$\boxed{P_n = n!,\ n\in\mathbb{N}^*.} \qquad (2)$$

Aşadar, am demonstrat

Teorema 2. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $P_n = n!$.

Deci, problema 2 propusă în secvența 1.1 poate fi rezolvată aplicînd noțiunea de permutări.

Avem $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Atunci $P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5\,040$.

Prin urmare, există 5 040 de moduri de programare a susținerii celor 7 referate în cadrul sesiunii.

Din formulele (1) şi (2) obținem următoarea formulă: $\boxed{A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}.}$

Observație. Vom considera că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod, adică $P_0 = 1$. Deci, $0! = 1$. Astfel, formula (2) este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

1.4. Combinări

Problema 5. Fie mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$. Să se determine toate submulțimile ei.

Rezolvare:

Obținem următoarele submulțimi:

a) mulțimea vidă: $\varnothing$;

b) submulțimi avînd fiecare cîte un element: $\{0\}, \{2\}, \{3\}$;

c) submulțimi avînd fiecare cîte două elemente: $\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{2, 3\}$;

d) însăşi mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$.

Aşadar, mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$ are în total opt submulțimi.

Definiție. Submulțimile mulțimii $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\text{card}\, M=n$, avînd fiecare cîte m elemente, unde $0\le m\le n$, se numesc **combinări de *n* elemente luate cîte *m***.

Numărul combinărilor de n elemente luate cîte m se notează C_n^m sau $\binom{n}{m}$.

Pentru problema 5 avem: $C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$, iar numărul tuturor submulțimilor (*cardinalul booleanului*) mulțimii $B=\{0, 2, 3\}$ este $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8=2^3$.

Observăm că $C_n^0=1$, deoarece oricare mulțime M are numai o submulțime fără nici un element, şi anume – mulțimea vidă. $C_n^1=n$, deoarece o mulțime cu n elemente are exact n submulțimi cu un singur element.

Observație. Pentru a nu confunda combinările cu aranjamentele, ținem cont de faptul că:
- la combinări, submulțimile unei mulțimi date nu sînt ordonate, iar la aranjamente toate submulțimile acesteia sînt ordonate;
- elementele aranjamentelor se scriu între paranteze rotunde, iar cele ale combinărilor – între acolade.

De exemplu, aranjamentele (1, 2) şi (2, 1) se consideră diferite, deşi sînt formate din aceleaşi elemente, iar submulțimile {1, 2} şi {2, 1} se consideră ca una şi aceeaşi combinare.

Prin urmare, combinările sînt astfel de submulțimi ale mulțimii date care diferă numai prin elemente, fără a se lua în considerație ordinea lor.

Să găsim o formulă pentru calculul numărului de combinări de n elemente luate cîte m, adică pentru calculul numărului C_n^m.

Considerăm toate submulțimile a cîte m elemente ale mulțimii $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ordonăm fiecare dintre aceste submulțimi în toate modurile posibile şi vom obține toate submulțimile ordonate ale lui M, care au cîte m elemente. Se ştie că numărul acestor submulțimi este A_n^m. Cum numărul tuturor submulțimilor lui M a cîte m elemente este C_n^m, iar fiecare submulțime poate fi ordonată în P_m moduri, rezultă că $A_n^m=C_n^m\cdot P_m$.

Deci, $\boxed{C_n^m=\dfrac{A_n^m}{P_m}.}$

Din formulele (1) şi (2) obținem:

$$\boxed{C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}} \quad \text{sau} \quad \boxed{C_n^m=\frac{n(n-1)\,...\,(n-m+1)}{m!}.}$$

Astfel, am demonstrat

Teorema 3. Dacă m şi n sînt numere naturale şi $0<m<n$, atunci

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

Observație. Pentru $m=0$, formula (3) dă $C_n^0=1$, iar pentru $m=n$ din (3) obținem $C_n^m=1$.

Aşadar, teorema 3 şi formula (3) sînt adevărate pentru orice m şi n, $0\le m\le n$.

Prin urmare, problema 3 din secvența 1.1 se rezolvă astfel:

$$C_{24}^{3}=\frac{24!}{3!(24-3)!}=2\,024.$$

Deci, echipa de serviciu pe clasă poate fi formată în 2 024 de moduri.

Proprietăți ale numerelor $\boldsymbol{C_n^m}$

Sînt adevărate egalitățile:

1° $C_n^m=C_n^{n-m},\ 0\le m\le n,\ m,n\in\mathbb{N}$ – *formula combinărilor complementare.*

2° $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1},\ 0\le m<n,\ m,n\in\mathbb{N}$ – *formula de recurență pentru calculul numărului de combinări.*

3° $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n,\ n\in\mathbb{N}$ – *numărul tuturor submulțimilor mulțimii M* formate din n elemente este egal cu 2^n, adică card $\mathcal{B}(M)=2^n$.

Exerciții. 1. Demonstrați proprietățile 1°–2° aplicînd formula pentru C_n^m.
2. Demonstrați proprietatea 3° aplicînd metoda inducției matematice.

Observații. **1.** O altă deducere a proprietății 3° va fi propusă în paragraful următor.
2. Aceste proprietăți exprimă diferite relații între submulțimile unei mulțimi finite.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația $C_{2n}^7>C_{2n}^5$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases}2n\ge 0\\ 2n\ge 7\\ 2n\ge 5\\ n\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ge 3{,}5,\\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

În DVA avem:

$$C_{2n}^7>C_{2n}^5\Leftrightarrow\frac{(2n)!}{7!(2n-7)!}>\frac{(2n)!}{5!(2n-5)!}\Leftrightarrow\frac{5!(2n-5)!}{7!(2n-7)!}>1\Leftrightarrow\frac{5!(2n-7)!\cdot(2n-6)(2n-5)}{5!\cdot 6\cdot 7\cdot(2n-7)!}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2n-6)(2n-5)>42\Leftrightarrow 4n^2-22n-12>0\Leftrightarrow 2n^2-11n-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n>6,\\ n<0{,}5.\end{array}\right.$$

Ținînd cont de DVA, obținem: $n>6,\ n\in\mathbb{N}$.

Răspuns: $S=\{7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

1.5. Regulile fundamentale ale combinatoricii

1.5.1. *Regula multiplicității (înmulțirii)*

Problema 6. În clasa a X-a sînt 12 băieți și 15 fete. În cîte moduri pot fi alcătuite echipe mixte la competițiile liceale de volei, formate din 4 băieți și 2 fete?

Rezolvare:

Patru băieți din cei 12 pot fi aleşi în C_{12}^4 moduri, iar două fete din cele 15 pot fi alese în C_{15}^2 moduri.

În acest caz, echipele respective pot fi formate în

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^2 = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2} = 495\cdot 105 = 51\,975 \text{ (moduri).}$$

Răspuns: 51 975 de moduri.

La rezolvarea acestei probleme am folosit ***regula multiplicității*** (sau ***regula înmulțirii***).

Teorema 4. Dacă mulțimile A şi B sînt finite, atunci cardinalul produsului cartezian $A\times B$ este egal cu produsul cardinalelor acestor mulțimi:

$$\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card} A\cdot \operatorname{card} B.$$

Teorema 5. Dacă mulțimile $B_1, B_2, ..., B_k$ sînt finite, atunci este verificată egalitatea:

$$\operatorname{card}(B_1\times B_2\times\ldots\times B_k) = \operatorname{card} B_1\cdot \operatorname{card} B_2\cdot\ldots\cdot \operatorname{card} B_k.$$

1.5.2. *Regula adunării*

Problema 7. Cîți divizori naturali are numărul 770?

Rezolvare:

Descompunem numărul 770 în produs de factori primi: $770 = 2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. Astfel, numărul 770 are patru divizori naturali primi (numerele 2, 5, 7, 11).

Numărul divizorilor naturali formați din produsul a cîte doi factori primi este $C_4^2 = 6$ (adică numerele 10, 14, 22, 35, 55, 77), iar numărul divizorilor naturali formați din produsul a cîte trei factori primi este $C_4^3 = 4$ (adică numerele 70, 110, 154, 385).

Divizori ai numărului 770 sînt şi numerele 1 şi 770.

Aşadar, numărul 770 are în total $4+6+4+1+1=16$ (divizori naturali).

Răspuns: 16 divizori naturali.

La rezolvarea acestei probleme am folosit ***regula adunării***.

Teorema 6. Dacă mulțimile finite A şi B sînt disjuncte, adică $A\cap B=\varnothing$, atunci cardinalul reuniunii mulțimilor A, B este egal cu suma cardinalelor acestor mulțimi:

$$\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Teorema 7. Dacă mulțimile finite $B_1, B_2, ..., B_k$ sînt disjuncte două cîte două, adică $B_i\cap B_j=\varnothing,\ i\neq j,$ atunci este verificată egalitatea:

$$\operatorname{card}(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_k) = \operatorname{card} B_1 + \operatorname{card} B_2 + \ldots + \operatorname{card} B_k.$$

Problemă rezolvată

Din 2 contabili şi 8 economişti trebuie să se formeze o comisie de 6 persoane. În cîte moduri poate fi formată această comisie, dacă în componența ei poate fi cel puțin un contabil?

Rezolvare:

Dacă în comisie va fi numai un singur contabil, această comisie, conform regulii multiplicității, poate fi formată în $C_2^1 \cdot C_8^5 = 112$ (moduri).

În cazul în care în comisie vor fi doi contabili, conform regulii multiplicității, avem $C_2^2 \cdot C_8^4 = 70$ (moduri).

În total, conform regulii adunării a combinatoricii, comisia respectivă poate fi formată în $C_2^1 \cdot C_8^5 + C_2^2 \cdot C_8^4 = 112 + 70 = 182$ (moduri).

Răspuns: 182 de moduri.

Menționăm că problemele de combinatorică examinate sînt simple – fără repetări de elemente. Problemele de combinatorică cu repetarea elementelor sînt mai complicate.

De exemplu, permutînd literele în cuvîntul *caietul*, obținem $P_7 = 7! = 5\,040$ de „termeni".

Dacă însă vom permuta literele în cuvîntul *copacul*, vom obține mai puțini „termeni", deoarece permutările a două litere „c" nu schimbă „termenul". În aceste cazuri, constatăm permutări cu repetarea elementelor. De asemenea, există aranjamente cu repetarea elementelor şi combinări cu repetarea elementelor.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se scrie toate mulțimile ordonate obținute din mulțimea A.

b) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din două elemente ale mulțimii A.

c) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din trei elemente ale mulțimii A.

2. Să se calculeze:

a) $3!$; $5!$; $8!$; b) $\frac{10!}{6!\cdot 2!}$; c) $\frac{9!\cdot 4!}{16!}$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 12$; b) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{22n!}{(n-3)!}$; c) $\frac{n!}{(n-5)!} = \frac{6n!}{(n-3)!}$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} \le 20$; b) $\frac{16n!}{(n-1)!} > \frac{5n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!} \ge \frac{1}{20}$.

5. Să se calculeze:

a) A_5^3, A_8^1, A_7^5, A_8^8, A_3^6; b) P_3, P_5, P_0, P_{10}, P_8; c) C_{10}^4, C_8^2, C_{16}^{16}, C_{12}^7, C_9^8.

6. Să se calculeze:

a) $\frac{A_5^4}{P_4}$; b) $A_7^5 \cdot C_5^3$; c) $\frac{C_7^4}{P_6}$; d) $A_8^2 \cdot P_3$; e) $C_4^3 \cdot A_3^2 \cdot P_4$; f) $\frac{A_5^3 + P_5}{C_6^4}$; g) $\frac{C_2^4 - P_6}{A_6^4}$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 4$; b) $A_x^3 - C_x^{x-2} = 4{,}5x$; c) $A_x^3 = 3A_x^2 + 2C_x^4$.

8. Fie mulțimea: 1) $A=\{0, 1\}$; 2) $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
a) Să se scrie toate submulțimile mulțimii A.
b) Să se afle cardinalul booleanului mulțimii A.

9. Avînd 10 lalele roşii şi 6 lalele galbene, să se decidă în cîte moduri se poate forma un buchet alcătuit din 5 lalele.

10. Campionatul național la fotbal se desfăşoară după sistemul tur-retur. Fiecare echipă joacă de două ori cu fiecare din celelalte echipe. Să se determine cîte partide trebuie să fie planificate în total, dacă la campionat participă 18 echipe.

11. O comisie este formată din preşedinte, vicepreşedinte şi trei membri. În cîte moduri 5 persoane îşi pot repartiza aceste funcții?

12. În cîte moduri se pot aşeza 8 copii pe o bancă?

13. În cîte moduri poate fi confecționat un tricolor din şapte bucăți de pînză de aceleaşi dimensiuni şi de culori diferite?

14. Cîți „termeni" pot fi alcătuiți, folosind de fiecare dată toate literele:
a) *p*, *a*, *t*, *r*, *i*, *e*; b) *a*, *u*, *r*; c) *p*, *r*, *e*, *ț*; d) *î*, *n*, *v*, *ă*, *ț*, *a*, *r*, *e*?

15. În cîte moduri 7 cărți pot fi aranjate pe o poliță?

16. În cîte moduri un cumpărător poate să aleagă 3 CD-uri diferite cu jocuri din cele 8 CD-uri diferite propuse de vînzător?

17. În cîte moduri un antrenor poate forma o echipă de volei compusă din 6 jucători, dacă în total sînt 16 jucători?

18. O urnă conține 6 bile albe şi 8 bile negre. Se extrag concomitent două bile. Să se afle probabilitatea evenimentului:
a) $A=\{$se extrag două bile albe$\}$; b) $B=\{$se extrag două bile negre$\}$.

19. Să se formuleze exemple de utilizare a aranjamentelor, permutărilor şi combinărilor în viața cotidiană şi în alte discipline şcolare.

B

20. În cîte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 2n\}$, astfel încît fiecare număr par să aibă rang par?

21. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:
a) $\dfrac{6(2n)!}{(2n-1)!}=\dfrac{n!}{(n-3)!}$; b) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}=C_5^3$; c) $\dfrac{(3n)!}{(3n-2)!}=\dfrac{5(n+1)!}{(n-1)!}$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:
a) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!(n-4)}\le\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\le 420$; c) $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!}<80$.

23. Să se calculeze:
a) $\dfrac{A_n^7-A_n^9}{A_n^8}$; b) $\dfrac{A_{n-1}^{n-2}+P_{n-1}}{C_{n-1}^{n-3}}$; c) $\dfrac{A_n^3\cdot P_n+2P_{n+1}}{P_{n+1}}$; d) $\dfrac{A_n^m\cdot P_{n-m+1}}{P_{m-2}}$.

24. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:
a) $P_{x+5}=(x^2-25)\cdot A_{x+4}^y\cdot P_{x+4-y}$; b) $A_{x+1}^{y+1}\cdot P_{x-y}=156P_{x-1}$.

25. Să se arate că pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$, valoarea expresiei $C_{n+m}^2 + C_{n+m+1}^2$ este un pătrat perfect.

26. Să se demonstreze că $P_m = (m-1)(P_{m-1} + P_{m-2}),\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$.

27. Cu cifrele 0, 1, 2, 5, 6, 7 se formează toate numerele naturale posibile de cîte şase cifre distincte.
a) Cîte astfel de numere se pot obține?
b) Cîte numere încep cu cifra 2?
c) Cîte numere încep cu cifra 1?
d) Cîte numere se termină cu cifra 1?
e) Cîte numere încep cu 20?

28. La un concurs participă 8 fete şi 9 băieți. La o etapă a concursului trebuie să se formeze 6 perechi (cîte un băiat şi cîte o fată). În cîte moduri se pot forma cele 6 perechi?

29. O echipă de fotbal are 25 de jucători, inclusiv 2 portari. În cîte moduri antrenorul poate forma echipa din 11 jucători, pentru partida de fotbal preconizată?

30. Doina are 7 CD-uri diferite cu muzică clasică, iar Nelu are 9 CD-uri diferite cu muzică folk. În cîte moduri ei pot face schimb a cîte 3 CD-uri?

31. Cîți divizori naturali are numărul:
a) 210; b) 85; c) 101; d) 105?

32. Olga are 10 lalele roşii şi 6 lalele galbene. În cîte moduri ea poate forma un buchet cu 3 lalele roşii şi 2 lalele galbene?

33. La o companie lucrează 3 directori adjuncți şi 10 manageri. În cîte moduri se poate forma o comisie din 5 persoane, astfel încît ea să includă cel puțin 2 directori adjuncți?

34. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:
a) $2A_x^{x-3} > x \cdot P_{x-2}$;
b) $A_x^3 + C_x^{x-2} \leq 14x$;
c) $A_x^3 - 12C_x^4 > 3A_x^2$;
d) $5C_x^3 > C_{x+2}^4$;
e) $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 < 1{,}25A_{n-2}^2$;
f) $14P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$.

35. Să se afle numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi, utilizînd combinările.

36. Să se demonstreze că:
a) $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$;
b) $C_n^m = C_{n-3}^m + 3C_{n-3}^{m-1} + 3C_{n-3}^{m-2} + C_{n-3}^{m-3}$.

37. Să se formuleze probleme de combinatorică:
a) cu aranjamente; b) cu permutări; c) cu combinări; d) mixte.

38*. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+2} = 720; \end{cases}$
b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} - 5A_{2y}^{3x-1} = 0, \\ 12C_{2y}^{3x} - 5C_{2y}^{3x-1} = 0. \end{cases}$

39*. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{2n}^n \cdot \sqrt{3n} < 4^n$. (Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova, 2010)

§2 Binomul lui Newton

2.1. Binomul (formula) lui Newton

Pornind de la identităţile $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, se verifică uşor că

$$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=(a+b)^2(a+b)^3=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Menţionăm că aceste formule sînt cazuri particulare ale formulei $(a+b)^n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, unde *a*, *b* pot fi oricare expresii algebrice.

Vom arăta că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}$, $0\le m\le n$, este adevărată formula

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n,} \qquad (1)$$

care se numeşte ***binomul lui Newton*** sau ***formula lui Newton***.

Demonstraţie:

Vom aplica metoda inducţiei matematice.

Notăm propoziţia (1) cu $P(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $n=1$, propoziţia $P(1)$ este adevărată, deoarece $(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b.$

Presupunem că pentru orice număr natural $n=m$, $m\ge 1$, propoziţia $P(m)$ este adevărată, adică $(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2+\ldots+C_m^ka^{m-k}b^k+\ldots+C_m^mb^m$, unde $k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m.$

Vom demonstra că şi pentru orice număr natural $n=m+1$, $m\ge 1$, propoziţia $P(m+1)$ este adevărată. Într-adevăr,

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m\cdot(a+b)=(C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+\ldots+C_m^ka^{m-k}b^k+\ldots+C_m^mb^m)(a+b)=$$

$$=C_m^0a^{m+1}+(C_m^0+C_m^1)a^mb+\ldots+(C_m^k+C_m^{k+1})a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+(C_m^{m-1}+C_m^m)ab^m+C_m^mb^{m+1}.$$

Cum $C_m^0=C_{m+1}^0=C_m^m=C_{m+1}^{m+1}=1$, aplicînd formulele de recurenţă pentru calculul numărului de combinări $C_m^0+C_m^1=C_{m+1}^1$, ..., $C_m^k+C_m^{k+1}=C_{m+1}^{k+1}$, $C_m^{m-1}+C_m^m=C_{m+1}^m$, obţinem: $(a+b)^{m+1}=C_{m+1}^0a^{m+1}+C_{m+1}^1a^mb+\ldots+C_{m+1}^{k+1}a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+C_{m+1}^mab^m+C_{m+1}^{m+1}b^{m+1}.$

Prin urmare, în baza metodei inducţiei matematice, propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n\ge 1$.

Aşadar, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ obţinem:

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n$ sau

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+b^n$ sau

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^{n-m}b^m,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le m\le n.}$$ ▶

Observaţie. Pentru a scrie prescurtat suma termenilor unui şir finit de termeni, se foloseşte simbolul „$\sum$” (sigma). Astfel, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ semnifică $a_1+a_2+\ldots+a_n$ şi se citeşte „suma termenilor a_i, *i* de la 1 la *n*”.

Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze $(a+b)^{12}$.

Rezolvare:

$$(a+b)^{12}=C_{12}^{0}a^{12}+C_{12}^{1}a^{11}b+C_{12}^{2}a^{10}b^{2}+C_{12}^{3}a^{9}b^{3}+C_{12}^{4}a^{8}b^{4}+C_{12}^{5}a^{7}b^{5}+$$
$$+C_{12}^{6}a^{6}b^{6}+C_{12}^{7}a^{5}b^{7}+C_{12}^{8}a^{4}b^{8}+C_{12}^{9}a^{3}b^{9}+C_{12}^{10}a^{2}b^{10}+C_{12}^{11}ab^{11}+C_{12}^{12}b^{12}=$$
$$=a^{12}+12a^{11}b+66a^{10}b^{2}+220a^{9}b^{3}+495a^{8}b^{4}+792a^{7}b^{5}+924a^{6}b^{6}+$$
$$+792a^{5}b^{7}+495a^{4}b^{8}+220a^{3}b^{9}+66a^{2}b^{10}+12ab^{11}+b^{12}.$$

Definiţii. • Membrul drept al formulei lui Newton se numeşte **dezvoltarea binomului la putere**.

• Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^m, ..., C_n^n$ din formula lui Newton se numesc **coeficienţi binomiali**.

Proprietăţi ale dezvoltării binomului la putere

1° Numărul termenilor dezvoltării binomului la putere, deci şi al coeficienţilor binomiali $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, este egal cu $n+1$.

2° În dezvoltarea binomului la putere, exponenţii puterilor lui *a* descresc de la *n* la 0, iar exponenţii puterilor lui *b* cresc de la 0 la *n*.

3° În orice termen al dezvoltării binomului la putere, suma exponenţilor puterilor lui *a* şi ale lui *b* este egală cu *n*.

4° Termenul

$$\boxed{T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k,\ k\in\{0, 1, 2, ..., n\},}$$

adică al $(k+1)$-lea termen din dezvoltarea binomului la putere (termenul de rangul $k+1$), se numeşte ***termenul general al dezvoltării***.

Atribuind lui *k* valori de la 0 la *n*, determinăm toţi termenii dezvoltării binomului la putere. De exemplu, $T_1=C_n^0a^nb^0$ este primul termen, $T_5=C_n^4a^{n-4}b^4$ este al cincilea termen din dezvoltarea binomului la putere.

Proprietăţi ale coeficienţilor binomiali

1° Suma coeficienţilor binomiali din dezvoltarea binomului la putere este egală cu 2^n: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$.

Într-adevăr, fie $a=b=1$. Substituindu-le în formula lui Newton, obţinem:

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n.$$

2° Cum $C_n^m=C_n^{n-m}$, obţinem: coeficienţii binomiali egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sînt egali.

3° Suma coeficienţilor binomiali situaţi pe locurile pare în dezvoltarea binomului este egală cu suma coeficienţilor binomiali situaţi pe locurile impare ale aceleiaşi dezvoltări şi este egală cu 2^{n-1}.

Într-adevăr, considerînd în formula lui Newton $a=1$, $b=-1$, ne convingem că $C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^nC_n^n=0$, ceea ce confirmă proprietatea formulată.

4° a) Pentru $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$, coeficientul binomial al termenului de mijloc al dezvoltării (C_n^k) este cel mai mare.

b) Pentru $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de la mijloc ai dezvoltării sînt egali ($C_n^k=C_n^{k+1}$) şi sînt cei mai mari.

Observație. E important să se facă distincție între coeficientul unui termen al dezvoltării binomului la putere şi coeficientul binomial al aceluiaşi termen, în cazul în care *a*, *b* sînt expresii cu coeficienți.

De exemplu, în dezvoltarea $(3a+b)^3 = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$ coeficientul termenului al treilea este 9, iar coeficientul său binomial este $C_3^2 = 3$.

Coeficienții binomiali ai dezvoltării binomului $(a+b)^n$ pot fi calculați folosind ***triunghiul lui Pascal***.

Cu ajutorul formulei recurente $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, se pot calcula succesiv numerele C_{n+1}^{m+1}, folosind numerele C_n^m şi C_n^{m+1}. Valorile respective pot fi scrise sub forma unui tabel triunghiular, care se numeşte ***triunghiul numeric*** sau ***triunghiul lui Pascal***.

C_n^m	$n \in \mathbb{N}$	Binomul la puterea n
1	$n = 0$	$(a+b)^0$
1 1	$n = 1$	$(a+b)^1$
1 2 1	$n = 2$	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$n = 3$	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$n = 4$	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$	$(a+b)^5$
1 6 15 20 15 6 1	$n = 6$	$(a+b)^6$
… … … … … … … … … … … … … …	…	…

În linia $(n+1)$ sînt scrise numerele $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ ...,\ C_n^n$.

Regula de completare a unei linii a triunghiului lui Pascal, avînd linia precedentă completată, este următoarea: primul şi ultimul număr al liniei este 1; fiecare din celelalte numere ale acestei linii este egal cu suma a două numere din linia precedentă, situate în stînga şi în dreapta numărului care urmează a fi calculat.

Astfel, numerele liniei a opta a triunghiului lui Pascal vor fi:

$1,\quad 1+6=7,\quad 6+15=21,\quad 15+20=35,\quad 20+15=35,\quad 15+6=21,\quad 6+1=7,\quad 1.$

Exercițiu. Completați linia a noua a triunghiului lui Pascal.

Observație. În clasa a XI-a vom studia un alt mod de determinare a coeficienților binomiali, aplicînd derivata funcției.

Puterea cu exponent natural a diferenței a două expresii se calculează după o formulă similară cu formula lui Newton:

$$(a-b)^n = C_n^0a^n - C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 - C_n^3a^{n-3}b^3 + ... + (-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m + ... + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Concis, vom scrie:

$$\boxed{(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n.} \qquad (2)$$

Formula (2) rezultă din formula lui Newton, scriind $(a-b)^n = [a+(-b)]^n$ şi dezvoltînd binomul la putere.

2.2. Aplicații ale binomului lui Newton

Să analizăm unele aplicații ale coeficienților binomiali și ale dezvoltării binomului la putere.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine termenul al șaselea din dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+x)^{14}$.

Rezolvare:

$$T_6 = C_{14}^5(\sqrt{x})^{14-5}\cdot x^5 = \frac{14!}{5!\cdot 9!}(\sqrt{x})^9\cdot x^5 = 2002x^5\cdot\sqrt{x^9} = 2002x^9\cdot\sqrt{x}.$$

2. Să se afle rangul termenului care nu-l conține pe x în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

Rezolvare:

Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{20}^k(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k$. Conform enunțului, $(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = x^0$. Deci, $\frac{20-k}{2}-2k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Prin urmare, termenul de rangul 5 nu-l conține pe x în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

Răspuns: Termenul al cincilea al dezvoltării.

3. Să se calculeze cel mai mare coeficient binomial al dezvoltării $\left(u^{\frac{1}{3}}-\sqrt[5]{y}\right)^{22}$.

Rezolvare:

Deoarece $n=22$ este număr par, rezultă că cel mai mare coeficient binomial al dezvoltării este $C_{22}^{11} = \frac{22!}{11!\cdot 11!} = 705\,432$.

Răspuns: $705\,432$.

4. În dezvoltarea la putere a binomului $\left(3a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, coeficientul binomial al termenului de rangul 4 este 20. Să se afle termenul de rangul 5 al acestei dezvoltări.

Rezolvare:

Cum $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$, obținem:

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 20 \Leftrightarrow (n-2)(n-1)n = 120 \Leftrightarrow n^3-3n^2+2n-120=0 \Leftrightarrow n=6.$$

Astfel, $T_5 = (-1)^4\cdot C_6^4\cdot(3a)^{6-4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 9a^2\cdot a^{-2} = 135.$

Răspuns: $T_5 = 135$.

Exerciţii şi probleme propuse

B

1. Să se dezvolte binomul la putere:
a) $(x+y)^7$; b) $(3a+b)^8$; c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$; d) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^5$; e) $(2a+3x)^4$.

2. Să se dezvolte binomul la putere:
a) $(4-x)^4$; b) $(\sqrt[3]{a}-b)^5$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^7$; d) $(2x-3)^6$; e) $(a-\frac{1}{2}b)^4$.

3. Să se dezvolte binomul la putere:
a) $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{a^2}}+\sqrt[5]{\frac{3}{b^2}}\right)^5$; b) $(x-\sqrt{x^2-1})^8-(x+\sqrt{x^2-1})^8$; c) $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^6-(\sqrt{2x}-\sqrt{y})^6$.

4. Să se arate că valoarea expresiei $(5-\sqrt{7})^n+(5+\sqrt{7})^n$ este un număr natural pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5. Să se determine:
a) termenul al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $(3x+4)^{10}$;
b) termenul al şaptelea din dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^9$;
c) termenul al zecelea din dezvoltarea la putere a binomului $(\ln 2-5\lg 3)^{11}$.

6. Să se determine suma coeficienţilor binomiali din dezvoltarea la putere a binomului:
a) $(4a+3b^2)^{25}$; b) $(\log_5 x-3y)^{108}$; c) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{215}$; d) $(8x-2y)^{71}$.

7. Să se determine suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar din dezvoltarea la putere a binomului:
a) $(3x+4y)^{15}$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{25}$; c) $(a-15b)^{28}$; d) $(2\sqrt{x}+b)^{32}$.

8. Să se determine:
a) termenul care îl conţine pe x^{10} în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+2x)^{16}$;
b) termenul care îl conţine pe a^4 în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{a})^{13}$;
c) termenul care nu îl conţine pe x în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{30}$.

9. Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării la putere a binomului:
a) $(x^2+2y^4)^{16}$; b) $(\sqrt{a}+b^4)^{24}$; c) $(x^3-y^2)^{14}$; d) $(\sqrt{x}-\lg x)^{18}$.

10. Să se determine cei doi termeni de mijloc ai dezvoltării la putere a binomului:
a) $(x-y^3)^{25}$; b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{13}$; c) $(2x^3-3y^2)^{11}$; d) $(3+x)^{17}$.

11. Să se calculeze suma coeficienţilor dezvoltării la putere a binomului:
a) $(8x^2-5y^2)^9$; b) $(7x+8y^3)^6$.

12. Să se determine termenii raţionali ai dezvoltării la putere a binomului:
a) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[7]{2})^{20}$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

13. Să se afle termenul care îl conţine pe $x^{-\frac{1}{4}}$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)^n$, ştiind că suma coeficienţilor binomiali este egală cu 256.

14. Să se determine n din dezvoltarea la putere a binomului $(x+y)^n$, dacă coeficientul lui y^3 este egal cu coeficientul lui y^5.

15. Să se afle termenul care îl conține pe x^9 în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+x)^n$, dacă suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 2048.

16. Să se determine A_n^3, dacă termenul al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^n$ nu-l conține pe a.

17. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice și cu ajutorul formulei lui Newton *mica teoremă a lui Fermat*: „Dacă p este un număr natural prim și $n \in \mathbb{N}$, atunci $n^p - n$ se divide cu p".

Observație. Teorema lui Fermat deseori se formulează astfel: „Dacă p este un număr natural prim și n este un număr natural care nu este multiplu al lui p, atunci $n^{p-1}-1$ se divide cu p".

18. Ce proprietăți ale numerelor (șirurilor) se pot depista în triunghiul lui Pascal?

19. Să se compună, utilizînd binomul lui Newton, o problemă vizînd:
a) aranjamentele; b) permutările; c) combinările.

20*. Comparînd coeficienții lui x din ambii membri ai egalității $(1+x)^k(1+x)^m=(1+x)^{k+m}$, să se demonstreze că $C_k^l C_m^0 + C_k^{l-1}C_m^1 + \ldots + C_k^0 C_m^l = C_{k+m}^l$, unde $k, m, l \in \mathbb{N}$ și $l \le \min(k, m)$.

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Cei 24 de elevi ai clasei a XII-a, la serata de absolvire, au făcut schimb de fotografii între ei. Cîte fotografii au fost necesare?

2. La un turneu de șah au participat 14 șahiști și fiecare 2 șahiști s-au întîlnit o dată. Cîte partide s-au jucat la turneu?

3. În cîte moduri se pot așeza 6 elevi pe 20 de locuri?

4. Un tren de pasageri are 12 vagoane. În cîte moduri pot fi cuplate vagoanele pentru formarea trenului?

5. Cele 4 examene de BAC trebuie să fie programate în 8 zile.
a) În cîte moduri se poate face programarea?
b) În cîte moduri se poate face programarea, dacă ultimul examen de BAC se va susține în mod obligatoriu în ziua a opta?

6. În cîte moduri pot fi aranjate 8 becuri electrice distinct colorate în 6 dulii?

7. În cîte moduri pot fi aranjați 10 sportivi la o competiție, dacă cel mai înalt trebuie să fie primul, iar cel mai scund – ultimul?

8. Clasa a X-a este reprezentată la un concurs de matematică de 12 elevi și 3 profesori. În cîte moduri se pot forma echipe de cîte 5 elevi și:
a) un profesor; b) doi profesori; c) trei profesori; d) cel puțin un profesor?

9. O persoană a format la întîmplare un număr de telefon, deoarece n-a reținut ultimele două cifre. Care este probabilitatea că numărul va fi format corect?

10. Într-un coşuleţ sînt 3 ciocolate cu nuci şi 3 ciocolate cu alune, avînd toate aceleaşi dimensiuni. Se iau la întîmplare două ciocolate. Care este probabilitatea că ambele ciocolate sînt de acelaşi fel?

11. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia:
a) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^m \cdot (n-m)!} = 90$; b) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; c) $8C_{n+1}^5 = 3A_n^3$; d) $6(C_{n+1}^1 + C_{n+3}^3) = 13C_{n+2}^2$.

12. Fie $(2a+b^2)^n$. Să se determine n, dacă:
a) suma coeficinţilor binomiali este 256;
b) suma coeficienţilor binomiali de rang impar este 256;
c) coeficientul binomial al lui a^3 este egal cu coeficientul binomial al lui a^9;
d) coeficientul binomial al termenului al treilea este media aritmetică a coeficienţilor binomiali ai termenilor al doilea şi al patrulea.

13. Să se determine termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{21}$, care nu-l conţine pe a.

14. Fie $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^6$. Să se afle x, dacă $T_5 = \dfrac{5}{9}$.

15. O urnă conţine 6 bile albe şi 8 bile negre. Se extrag concomitent două bile.
Să se determine probabilitatea evenimentului: $A = \{$se extrag două bile albe$\}$;
$B = \{$se extrag două bile negre$\}$;
$C = \{$se extrag două bile de aceeaşi culoare$\}$.

B

16. Cîte elemente trebuie să conţină o mulţime, astfel încît numărul permutărilor elementelor acesteia să fie cuprins între 3 000 şi 5 500?

17. Sergiu a invitat la ziua de naştere 8 colegi de clasă.
a) În cîte moduri îi poate aşeza la o masă ovală?
b) Generalizaţi pentru n colegi.

18. Din 10 operatori şi 5 ingineri ai firmei „Tempus”, se formează o delegaţie alcătuită din 6 persoane, dintre care cel puţin 2 sînt ingineri. În cîte moduri se poate forma această delegaţie?

19. Cîte numere naturale se pot forma cu cifrele 0, 2, 4, 6, 8, astfel încît în scrierea fiecărui număr orice cifră să apară cel mult o dată?

20. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuaţia:
a) $C_n^3 + C_n^4 > n(n-2)$; b) $C_{n+8}^{n+3} \le 5A_{n+6}^3$; c) $C_{10}^{n-1} > 2C_{10}^n$.

21. Fie dezvoltarea $(\sqrt{7} - \sqrt[3]{5})^n$. Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării, dacă:
a) $n = 5$; b) $n = 100$.

22. Să se demonstreze că:
a) $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$; b) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ valoarea numerică a expresiei $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ este un număr întreg.

24*. Să se demonstreze că valoarea expresiei $C_{2n+1}^1 \cdot C_{2n+1}^2 \cdot C_{2n+1}^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n+1}^{2n}$ este un pătrat perfect.

25*. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemul $C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$.

26*. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)! > 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. a) Completați cu un număr natural, astfel încît expresia obținută să aibă sens: $A_{\square}^{10}$. **1**
   b) Aflați numărul de aranjamente obținut la a) după completare. **1**
2. a) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: **1**
   Cu cifrele 2, 4, 6, 8, 0 pot fi formate 100 de numere de telefon de cîte cinci cifre distincte.
   b) Aflați cardinalul booleanului mulțimii $A = \{2, 4, 6, 8, 0\}$. **1**
3. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $C_{x+1}^{x-1} = x^2 - 1$. **3**
4. Comitetul organizatoric al unei serate matematice a elevilor clasei a X-a este format din 4 membri. În cîte moduri poate fi format acest comitet, dacă în clasă sînt 25 de elevi? **2**
5. Formulați un exemplu de utilizare a elementelor de combinatorică în viața cotidiană. **1**

B

1. Completați cu un număr, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată: **1**
   $$\frac{A_n^4 \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}} = 42C_{\square}^5.$$
2. Determinați valoarea de adevăr a propoziției: **2**
   Numărul $A_{3n-5}^{n^2-2n}$ este definit pentru $n \in \{2, 3, 5\}$.
3. Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} \leq 30P_x$. **2**
4. Cîte numere naturale de zece cifre distincte pot fi formate? **1**
5. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, valoarea numerică a expresiei $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ este un număr natural. **2**
6. În clasa a X-a sînt 14 băieți și 18 fete. În cîte moduri se pot forma echipe alcătuite din 3 băieți și 5fete? **2**

Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$n! = (n-1)!\,n$

$0! = 1$

Mulțimi finite

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Mulțimi ordonate

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Probleme de combinatorică simple

Aranjamente

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $0 \le m \le n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$

Combinări

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $0 \le m \le n,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$

Permutări

$P_n = n!,\ n \in \mathbb{N}^*$

Proprietăți ale numerelor $C_n^m,\ 0 \le m \le n$

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Binomul lui Newton

$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$

Termenul general al dezvoltării

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$,
$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Proprietăți ale coeficienților binomiali

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3° $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

4° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

5° a) coeficientul binomial C_n^k este cel mai mare pentru $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$;
b) coeficienții binomiali $C_n^k = C_n^{k+1}$ sînt cei mai mari pentru $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
 & C_{n-1}^0 & & C_{n-1}^1 & & \ldots & & C_{n-1}^{n-2} & & C_{n-1}^{n-1} & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-2} & & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}
$$

Triunghiul lui Pascal

Regulile fundamentale ale combinatoricii

1. Regula multiplicității (înmulțirii): $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}\,A \cdot \mathrm{card}\,B$.
2. Regula adunării: $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B,\quad A \cap B = \varnothing$.

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, totalităților, sistemelor de ecuații combinatorii. Aplicații în diverse domenii (fizică, chimie, teoria probabilităților, în viața cotidiană etc.).

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților de ecuații combinatorii; dezvoltări ale binomului la putere. Aplicații în diverse domenii ale științei și tehnicii.

MODULUL 5

Funcții reale. Proprietăți fundamentale

Dacă cineva vrea să caute în mod serios adevărul, el nu trebuie să aleagă o singură știință, căci toate sînt legate între ele și dependente.

René Descartes

Obiective

- identificarea și utilizarea noțiunilor *funcție*, *graficul funcției* în diverse contexte;
- determinarea proprietăților fundamentale ale funcției și ale graficului ei;
- clasificarea funcțiilor studiate după diferite criterii;
- aplicarea proprietăților funcțiilor în situații reale și/sau modelate.

§ 1 Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de funcție. Moduri de a defini o funcție

În practică se întîlnesc mărimi variabile care își schimbă valorile în funcție de valorile altor variabile. De exemplu, temperatura aerului se schimbă pe parcursul zilei în funcție de ora la care se fac măsurările; valoarea variabilei $u = 2t + 4$ depinde de valoarea variabilei t. Valorile variabilei $y = \sqrt{x-1}$ se schimbă în funcție de valorile variabilei x, însă nu oricărei valori a lui x îi corespunde o valoare a lui y (de exemplu, pentru $x = 0$).

Definiție. Prin **funcție** se înțelege tripletul ordonat (A, B, f), unde A, B sînt mulțimi nevide, iar f este o corespondență (lege) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$. În alți termeni, funcția este o **aplicație** de la A la B.

Dacă lui x i se asociază y, atunci se notează $y = f(x)$ și se spune că y este ***imaginea*** lui x sau ***valoarea funcției*** f în punctul x. Mulțimea A se numește ***domeniu de definiție*** al funcției f și se notează cu $D(f)$, iar mulțimea B se numește ***codomeniul*** funcției f sau ***domeniul de valori***. Funcția (A, B, f) se mai scrie $f: A \to B$ și se citește „f definită pe A cu valori în B” sau „f de la A la B”. Mulțimea $B_1 = \{y \in B \mid (\exists x \in A)\ (f(x) = y)\}$ se numește ***imaginea mulțimii A*** sau ***mulțimea valorilor*** funcției f și se notează cu $f(A)$ sau $E(f)$, sau $\mathrm{Im} f$.

Observație. Vom examina ***funcțiile reale*** (numerice) pentru care A și B sînt submulțimi ale mulțimii $\mathbb{R}$.

Definiție. Funcțiile (A, B, f) și (A_1, B_1, g) se numesc **funcții egale** dacă:
1) $A = A_1$; 2) $B = B_1$; 3) $f(x) = g(x)$ pentru orice x din A.

Exemple

1. Funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, sînt egale, întrucît $D(f) = D(g)$, $E(f) = E(g)$ și pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)$.

2. Funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, nu sînt egale, deoarece codomeniile lor sînt diferite.

3. Este clar că funcțiile egale au și mulțimile de valori egale. Mulțimea de valori a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, este $\mathbb{R}_+$, fiindcă oricare ar fi $y \in \mathbb{R}_+$ există $x \in \mathbb{R}$, și anume $x = \pm y$, astfel încît $f(x) = y$. De altfel, și funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, are aceeași mulțime de valori.

Observații. **1.** Pentru funcția $f: A \to B$, corespondența f se numește ***dependență funcțională***. În relația $y = f(x)$, cu $x \in A$, $y \in B$, variabila x se numește ***variabilă independentă*** sau ***argumentul funcției***, iar variabila y – ***variabilă dependentă***.

2. Dacă este clar din context care sînt mulțimile A, B, atunci, în loc de $f: A \to B$, vom spune și vom scrie „funcția f”.

Dacă $f: A \to B$ este o funcție, $M \subseteq A$, $K \subseteq B$, atunci prin ***imaginea mulțimii*** M la aplicația f vom înțelege submulțimea $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ a mulțimii B, iar prin ***preimaginea mulțimii*** K vom înțelege submulțimea $T = \{x \in A \mid f(x) \in K\}$ a mulțimii A.

Exercițiu rezolvat

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, și mulțimile $M = [0, 2]$, $K = [3, 7]$. Să se determine: a) imaginea mulțimii M; b) preimaginea mulțimii K.

Rezolvare:

a) Pentru a determina $f(M)$ – imaginea mulțimii M, ținem cont că $0 \le x \le 2$ și succesiv obținem: $0 \le x^2 \le 4$, $3 \le x^2 + 3 \le 7$, $3 \le f(x) \le 7$. Deci, $f(M) \subseteq [3, 7]$. Este adevărată și incluziunea inversă, $[3, 7] \subseteq f(M)$, deoarece ecuația $x^2 + 3 = t$, $t \in [3, 7]$, are soluții în intervalul $[0, 2]$. Așadar, $f(M) = [3, 7]$.

b) Din inegalitatea dublă $3 \le f(x) \le 7$ obținem $|x| \le 2$, adică preimaginea mulțimii K este mulțimea $T = [-2, 2]$.

Funcția poate fi definită:

1) în ***mod sintetic*** – printr-un tabel, printr-o diagramă, printr-un grafic, prin enumerarea perechilor ordonate de numere;
2) în ***mod analitic*** – cu ajutorul unei expresii (formule).

1 *Modul sintetic de definire a funcției*

a) Printr-un ***tabel*** poate fi definită o funcție al cărei domeniu de definiție este finit și conține un număr mic de elemente (fig. 5.1 a)).

b) Printr-o ***diagramă*** poate fi definită o funcție al cărei domeniu de definiție și codomeniu sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Euler–Venn (fig. 5.1 b)).

a)

x	-1	0	$3{,}14$	5
$f(x)$	7	1	0	$0{,}3$

b)

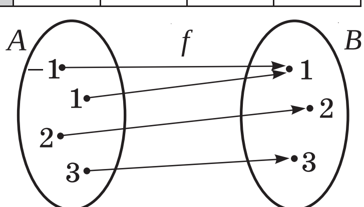


Fig. 5.1

c) Printr-un ***grafic*** (a se vedea secvența 2.1).

d) Fie o mulțime G de ***perechi ordonate*** (x, y), $x \in A$, $y \in B$, de numere reale, astfel încît pentru (x_1, y_1), $(x_1, y_2) \in G$ avem $y_1 = y_2$. Amintim că în această situație am definit o funcție $f\colon A \to B$, considerînd $b = f(a)$, dacă $(a, b) \in G$.

2 *Modul analitic de definire a funcției*

Cel mai frecvent, o funcție se definește în ***mod analitic***, adică corespondența dintre valorile variabilei dependente și ale celei independente este dată de ***o formulă, o relație, o proprietate***.

Exemple

1. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$. Valoarea radicalului este univoc determinată, deci în mod unic va fi determinată valoarea funcției f pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.

2. ***Funcția „partea întreagă”***. Notăm cu $[a]$, $a \in \mathbb{R}$, cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a. De exemplu: $[3{,}1] = [\pi] = 3$, $[-2{,}1] = -3$, $[2] = 2$.

Funcția $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = [x]$, se numește ***funcția partea întreagă*** a numărului și se notează [ ].

Se verifică ușor ***proprietățile funcției*** [ ]:

1° $[x] \le x$; 2° $[x + m] = [x] + m$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. ***Funcția „partea fracționară”***. Notăm cu $\{a\} = a - [a]$, $a \in \mathbb{R}$, partea fracționară a numărul a. De exemplu: $\{1{,}01\} = 1{,}01 - [1{,}01] = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$;
$\{-2{,}1\} = -2{,}1 - [-2{,}1] = -2{,}1 - (-3) = 0{,}9$; $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$.

Funcția $h\colon \mathbb{R} \to [0, 1)$, $h(x) = \{x\}$, se numește ***funcția partea fracționară*** a numărului și se notează { }.

4. ***Funcția lui Dirichlet*** este $f\colon \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$

Observație. Deseori, se acceptă să se definească funcția numai prin formula $y = f(x)$, determinînd, de fapt, numai dependența funcțională, care, de altfel, nu depinde de notația variabilelor, domeniul de definiție și codomeniul funcției urmînd să fie determinate. În acest caz, domeniul de definiție $D = D(f)$ se consideră egal cu domeniul valorilor admisibile (DVA) al variabilei x în expresia $f(x)$, iar mulțimea $E(f)$ se consideră egală cu $f(D)$.

Exercițiu rezolvat

Să se afle mulțimile $D(f)$, $E(f)$ ale funcției f definite de formula $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$.

Rezolvare:

$D(f)$ este mulțimea soluțiilor inecuației $x - 3 \ge 0$, deci $D(f) = [3, +\infty)$.

Mulțimea valorilor unei funcții f definite analitic este mulțimea valorilor reale ale parametrului t, pentru care ecuația $f(x) = t$ are cel puțin o soluție în $D(f)$. În cazul dat, această ecuație ia forma $\sqrt{x-3}+2=t$ și în intervalul $[3, +\infty)$ este echivalentă cu fiecare din ecuațiile $\sqrt{x-3}=t-2$, $x-3=(t-2)^2$ pentru $t-2\geq 0$. Astfel, oricare ar fi $t\in[2, +\infty)$, ecuația $\sqrt{x-3}+2=t$ are soluție care aparține mulțimii $D(f)$.

Prin urmare, $f(D)=E(f)=[2, +\infty)$.

1.2. Operații cu funcții

Deseori, avînd două funcții, apare necesitatea de a examina suma, produsul și/sau cîtul lor.

Definiție. Se numește **suma**, **produsul**, **cîtul funcțiilor** $f\colon A\to\mathbb{R}$ și $g\colon A\to\mathbb{R}$, respectiv funcția $(f+g)\colon A\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

funcția $(f\cdot g)\colon A\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$;

funcția $\dfrac{f}{g}\colon A\to\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$, pentru orice x din A.

Exercițiu rezolvat

Să se determine suma și produsul funcțiilor

$$f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}+1, \text{ și } g\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ g(x)=\sqrt{x+2}.$$

Rezolvare:

În baza definiției, pentru funcțiile $f+g\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f\cdot g\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ obținem:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+1+\sqrt{x+2},\quad (f\cdot g)(x)=(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+2}.$$

Definiție. Se numește **restricția** funcției $f\colon A\to B$ la submulțimea nevidă M, $M\subseteq A$, funcția $g\colon M\to f(M)$, cu $g(x)=f(x)$ pentru orice x din M.

În acest context, funcția f se numește o ***prelungire*** a funcției g la mulțimea A.

Exemplu

Restricția funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x-4$, la submulțimea $M=\left\{-1, 0, \dfrac{3}{2}, 4\right\}$ este dată în tabelul alăturat:

x	-1	0	$\frac{3}{2}$	4
$f(x)$	0	-4	$-\frac{25}{4}$	0

De fapt, de fiecare dată cînd este necesar de a obține cîteva puncte caracteristice ale graficului unei funcții, se folosește o restricție a acesteia la o submulțime finită.

Observație. Dacă funcțiile f, g au domenii de definiție diferite și este necesar de a examina suma sau produsul lor, atunci se folosesc restricțiile lor pe mulțimea $D(f)\cap D(g)$.

Pentru a extinde aplicarea funcțiilor în diferite contexte, este necesar să se examineze și alte operații cu funcții.

Definiție. Fie funcțiile $f\colon A\to B$ şi $g\colon B_1\to E$, cu $B\subseteq B_1$. Funcția $h\colon A\to E$, definită prin egalitatea $h(x)=g(f(x))$, $x\in A$, se numeşte **compusa (compunerea) funcției *g* cu funcția *f*** şi se notează $g\circ f$.

Enunțăm fără demonstrație

Teorema 1. Pentru funcțiile $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$ şi $h\colon C\to D$, compunerea lor este asociativă: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Exercițiu rezolvat

Să se decidă dacă există compusele $g\circ f$, $f\circ g$, dacă:
$f\colon[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g\colon[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-3$.

Rezolvare:

Cum incluziunea $\mathbb{R}\subseteq[1,+\infty)$ este falsă, rezultă că nu se poate defini compusa $f\circ g$. Deoarece $\mathbb{R}_+\subseteq[-2,+\infty)$, funcția $h=g\circ f$ este definită, are domeniul de definiție $[1,+\infty)$, codomeniul $\mathbb{R}$ şi $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2-3=x-4$.

Observație. Operația de compunere a funcțiilor, în caz general, nu este comutativă, adică $f\circ g\neq g\circ f$.

Un rol deosebit în compunerea funcțiilor îl au ***funcțiile identice***: $\varepsilon_M\colon M\to M$, $\varepsilon_M(x)=x$, $x\in M$.

Fie funcțiile $f\colon A\to B$, $\varepsilon_A\colon A\to A$, $\varepsilon_A(x)=x$, $\varepsilon_B\colon B\to B$, $\varepsilon_B(x)=x$. Să determinăm compusele $\varepsilon_B\circ f\colon A\to B$ şi $f\circ\varepsilon_A\colon A\to B$.

Avem: $(\varepsilon_B\circ f)(x)=\varepsilon_B(f(x))=f(x)$, $x\in A$, şi $(f\circ\varepsilon_A)(x)=f(\varepsilon_A(x))=f(x)$, $x\in A$. Prin urmare, funcțiile $f\circ\varepsilon_A$, $\varepsilon_B\circ f$ şi f au acelaşi domeniu de definiție A, acelaşi codomeniu B şi iau valori egale pentru orice $x\in A$. Rezultă că aceste trei funcții sînt egale: $f\circ\varepsilon_A=\varepsilon_B\circ f=f$.

Exerciții propuse

A

1. Să se precizeze domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$; c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

2. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2-2$; b) $f(x)=x-x^2$; c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

3. Să se decidă dacă sînt egale funcțiile f, g:
a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$, $g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x$;
b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$;
c) $f, g\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x-2}{x(x-2)}$.

4. Fie $A=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f\colon A\to B$, $f(x)=|x|+1$.
Să se definească funcția f printr-o diagramă.

B

5. Să se precizeze domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; b) $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|-2}$; c) $f(x)=\dfrac{1}{\{x\}}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{[x]}$.

6. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=[x]$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$.

7. Să se afle suma, produsul și compusa $f\circ g$ ale funcțiilor $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=|x|$, $g(x)=x-1$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $g(x)=x^3+1$; c) $f(x)=x^3-1$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

8. Să se determine compusele $f\circ f$, $f\circ f\circ f$, ..., $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ ori}}$ ale funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2$; b) $f(x)=x-1$.

9. Să se reprezinte funcția $\Phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sub formă de compusă a două funcții (diferite de cele identice):
a) $\Phi(x)=(x^{10}+1)^{17}$; b) $\Phi(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$.

10*. Fie funcțiile $f\colon A\to B$, $g\colon A\to C$, $M\subseteq A$. Pot fi restricțiile acestor funcții la submulțimea M funcții egale? Să se dea exemple.

§ 2 Proprietățile fundamentale ale funcțiilor reale

2.1. Graficul funcției

Definiție. Se numește **graficul funcției** $f\colon A\to B$ mulțimea
$$G_f=\{(x, y)\mid x\in A,\ y=f(x)\}.$$

Exemple

1 Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Punctul $A(2, 3)$ aparține graficului funcției f, fiindcă $f(2)=3$, iar punctul $B(3, 1)$ nu aparține graficului acestei funcții, deoarece $f(3)=5\neq 1$.

2 Reprezentarea grafică ne ajută vizual să formulăm concluzii referitoare la variația funcției. De exemplu, fie că dependența dintre numărul de femei (din cele 1375) de o anumită înălțime și această înălțime x este reprezentată grafic în figura 5.2. Se observă ușor că: femei cu statura de 140 cm sînt puține; odată cu creșterea înălțimii, numărul lor crește pînă cînd înălțimea ajunge la 165 cm, apoi, odată cu creșterea în continuare a înălțimii, numărul femeilor (de o anumită statură) descrește.

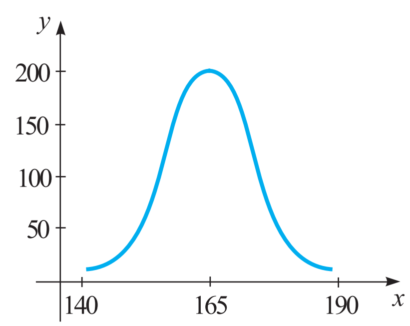


Fig. 5.2

2.2. Zeroul funcției

Este bine se cunoaştem punctele în care graficul funcției f intersectează axa Ox; în astfel de puncte funcția poate să-şi schimbe semnul valorilor sale. Aceste puncte se numesc ***zerourile funcției*** şi se determină rezolvînd ecuația $f(x)=0$.

2.3. Monotonia funcției

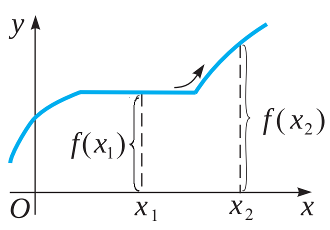
Definiții. • Funcția $f: D \to E$ se numeşte **crescătoare** (**descrescătoare**) pe mulțimea M, $M \subseteq D$, dacă pentru orice $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$, avem $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

• Funcția $f: D \to E$ se numeşte **strict crescătoare** (**strict descrescătoare**) pe mulțimea M, $M \subseteq D$, dacă pentru orice $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$, avem $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

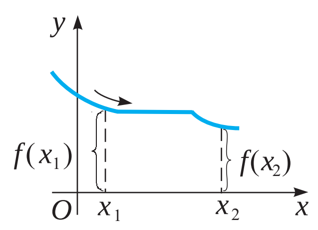
Funcția crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe o mulțime se numeşte ***monotonă*** (***strict monotonă***) pe această mulțime.

Creşterea (descreşterea) funcției pe o mulțime semnifică faptul că valorii mai mari a argumentului ce aparține acestei mulțimi îi corespunde valoarea mai mare sau egală (mai mică sau egală) a funcției (fig. 5.3).

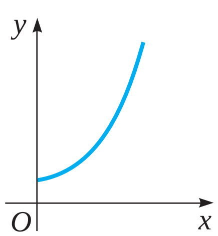
Geometric, creşterea (descreşterea) strictă a unei funcții pe un interval se ilustrează astfel: la deplasarea pe graficul funcției în sensul pozitiv al axei Ox, se va efectua concomitent o deplasare în sensul pozitiv (negativ) al axei Oy, adică în sus – figura 5.3 c) (în jos – figura 5.3 d)).



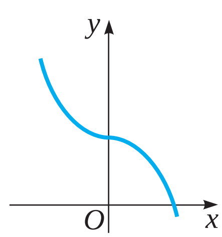
a) Graficul unei funcții crescătoare



b) Graficul unei funcții descrescătoare



c) Graficul unei funcții strict crescătoare



d) Graficul unei funcții strict descrescătoare

Fig. 5.3

Problemă. Să se arate că funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

Rezolvare:

Se ştie că $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Din $x_1<x_2<-\frac{b}{2a}$ (deci $x_i+\frac{b}{2a}<0$), consecutiv, obținem:

$$x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}<0,\ \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2>\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2,\ a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2>a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}>a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ sau $f(x_1)>f(x_2)$. Prin urmare, funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

Analog se examinează cazurile $a>0,\ x\in\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; $a<0,\ x\in\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, $x\in\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, şi se obține

Teorema 2. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0\ (a<0)$, este strict crescătoare (descrescătoare) pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ şi strict descrescătoare (crescătoare) pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

2.4. Paritatea funcției

Definiție. Funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ se numeşte **pară** (**impară**) dacă:
1) pentru $x\in D$ avem $-x\in D$ şi
2) $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$, pentru orice $x\in D$.

Exemple

1. Funcția $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{a}{x},\ a\in\mathbb{R}^*$, este impară, întrucît:
1) pentru $x\in\mathbb{R}^*$ avem $-x\in\mathbb{R}^*$ şi 2) $f(-x)=\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}=-f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

2. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^2+3$, este pară, fiindcă
$f(-x)=(-x)^2+3=x^2+3=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

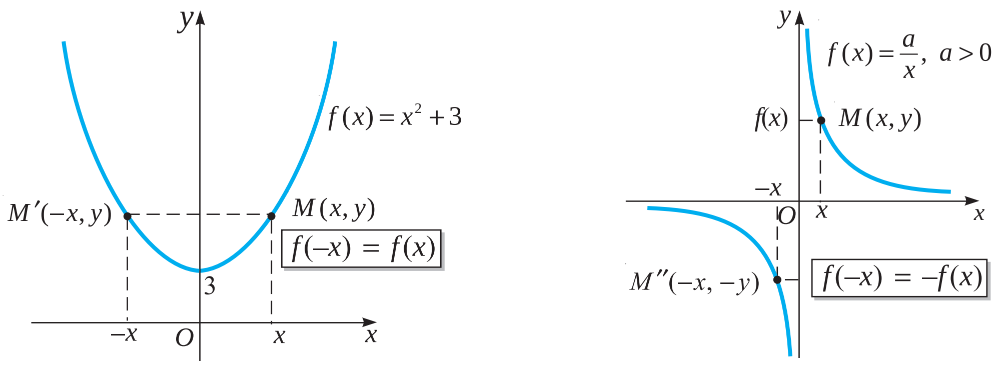
3. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a, b\in\mathbb{R}^*$, nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x)=ax^2-bx+c$ şi se va găsi o astfel de valoare x_0, încît $f(-x_0)\neq\pm f(x_0)$ (de exemplu, $x_0=-\frac{b}{2a}$).

Este important să cunoaştem interpretarea geometrică a parității funcției.

Teorema 3. Graficul funcției pare este simetric față de axa Oy, iar graficul funcției impare este simetric față de originea $O(0, 0)$ a sistemului de axe ortogonale.

Demonstrație:

În baza definiției, punctele $M(x, y)$, $M'(-x, y)$ (simetrice față de axa Oy) concomitent aparțin sau nu aparțin graficului funcției pare f, deoarece $y = f(x) = f(-x)$ (fig. 5.4 a)), iar punctele $M(x, y)$, $M''(-x, -y)$ (simetrice față de originea $O(0, 0)$) concomitent aparțin sau nu aparțin graficului funcției impare f, deoarece $y = f(-x) = -f(x)$ (fig. 5.4 b)). ▶



a) Graficul unei funcții pare

b) Graficul unei funcții impare

Fig. 5.4

Exercițiu rezolvat

Să se studieze paritatea funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

Rezolvare:

$D(f) = \mathbb{R}$. Cum $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) \neq -f(1)$, condiția 2) din definiție nu se respectă, deci funcția f nu este nici pară, nici impară.

Observație. Orice funcție $f: D \to \mathbb{R}$ al cărei domeniu de definiție $(D(f) = D)$ este simetric față de originea $O(0, 0)$ poate fi reprezentată sub forma $f = h_1 + h_2$, unde h_1 este o funcție pară, iar h_2 este o funcție impară.

Într-adevăr, acestea sînt funcțiile:

$$h_1, h_2: D(f) \to \mathbb{R},\ h_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),\ h_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Exercițiu. Demonstrați că h_1 este o funcție pară, iar h_2 este o funcție impară (a se vedea observația).

2.5. Periodicitatea funcției

Valorile funcției al cărei grafic este reprezentat în figura 5.5 se repetă la creșterea argumentului cu 1: $f(x)=f(x+1)=f(x+2)=...=f(x+n),\ n\in\mathbb{Z}$.

Despre comportarea acestei funcții pe $\mathbb{R}$ ne putem da seama știind comportarea ei pe un interval de lungimea 1, de exemplu, pe [0, 1).

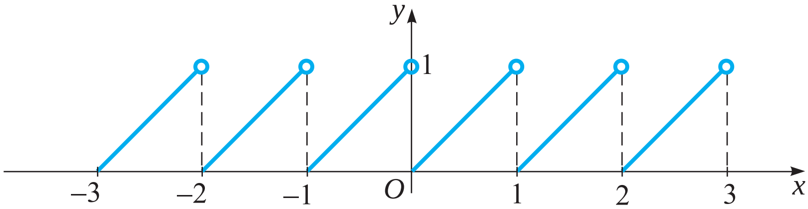


Fig. 5.5

Definiție. Funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ se numește **periodică** dacă există un astfel de număr real T, $T\neq 0$, numit **perioada funcției**, încît:
1) pentru $x\in D$ avem $(x\pm T)\in D$; 2) $f(x\pm T)=f(x)$ pentru orice $x\in D$.

Exercițiu. Arătați că numerele $kT,\ k\in\mathbb{Z}^*$, de asemenea sînt perioade ale unei funcții periodice cu perioada T.

Exemplu

Considerăm funcția $f\colon\mathbb{R}\to[0,1),\ f(x)=\{x\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x. Orice număr întreg nenul T este perioadă a acestei funcții, întrucît $\{x+T\}=\{x\},\ x\in\mathbb{R}$.

Într-adevăr, în baza proprietăților funcției [ ], obținem:

$$f(x+T)=\{x+T\}=x+T-[x+T]=x+T-([x]+T)=x-[x]=\{x\}=f(x).$$

Graficul acestei funcții este reprezentat în figura 5.5.

Exercițiu. Demonstrați că orice număr $T\in\mathbb{Q}^*$ este perioadă a funcției lui Dirichlet.

Una din problemele majore pentru funcțiile periodice este determinarea perioadei minime pozitive T_0, numită ***perioada principală***, deoarece, cunoscînd valorile funcției pe un interval $[a, a+T_0)$ de lungime T_0, se vor cunoaște valorile în orice alte puncte din mulțimea $D(f)$.

Într-adevăr, pentru orice $x\in D(f)$ există $k\in\mathbb{Z}$, astfel încît $x+k\cdot T_0\in[a, a+T_0)$ și $f(x)=f(x+k\cdot T_0)$.

Exemple

1. Perioada principală a funcției $f\colon\mathbb{R}\to[0,1),\ f(x)=\{x\}$, este $T_0=1$.

Într-adevăr, orice T, $0<T<1$, nu este perioadă a acestei funcții, deoarece există x, $0<x<1$, astfel încît $0<x+T<1$, $x<x+T$. Deci, $f(x)<f(x+T)$.

2. Funcția $f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$, nu are perioadă principală.

Observație. Dacă funcția f este strict monotonă pe un interval infinit (nemărginit), atunci ea nu este periodică.

2.6. Extremele funcției

Problemă. Un fermier a obținut dreptul de a-şi marca un lot experimental de formă dreptunghiulară, mărginit dintr-o parte de un canal rectiliniu de irigare. Dimensiunile lotului sînt limitate de lungimea p a frînghiei cu care el trebuie să marcheze lotul din trei părți. Este firesc că fermierul vrea să marcheze un lot de arie maxim posibilă. Prietenii îi dau sfaturi contradictorii în privința dimensiunilor lotului. Care este soluția?

Rezolvare:

Pentru soluționarea problemei, vom exprima aria $\mathscr{A}$ a lotului prin mărimea x a lungimii laturii paralele cu canalul: $\mathscr{A}=x\cdot\frac{p-x}{2}$, unde $\frac{p-x}{2}$ este lungimea laturii perpendiculare pe canal. Am obținut funcția de gradul II, definită prin formula $\mathscr{A}(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{p}{2}x,\ x\in(0,\ p)$, al cărei grafic reprezintă o parabolă cu ramurile orientate în jos (fig. 5.6). Cea mai mare valoare a funcției $\mathscr{A}(x)$ este atinsă în vîrful parabolei cu abscisa $x_0=\frac{p}{2}$. Astfel, funcția $\mathscr{A}(x)$ are maxim local în punctul $x_0=\frac{p}{2},\ x_0\in(0,\ p)$. Prin urmare, lungimea laturii paralele cu canalul este $\frac{p}{2}$, lungimea laturii perpendiculare pe canal este $\frac{p}{4}$, iar valoarea maximă a ariei lotului este $\frac{p^2}{8}$.

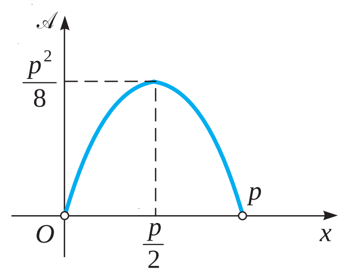


Fig. 5.6

Şi analitic se poate arăta că valoarea maximă a ariei lotului se obține pentru $x_0=\frac{p}{2}$, deoarece pentru orice $x,\ 0<x<p,$ avem $\mathscr{A}(x)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{8}\le\frac{p^2}{8}$.

Definiție. Se numeşte **vecinătate a punctului** a orice interval deschis de forma

$$V_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\quad \varepsilon>0.$$

Intervalul $(-\infty,+\infty)$ se consideră vecinătate a oricărui punct $a\in\mathbb{R}$.

Definiție. Punctul $a\in A$ se numeşte **punct de maxim** (**minim**) **local** al funcției $f\colon A\to B$, dacă există o vecinătate $V_\varepsilon(a)$, astfel încît $f(x)\le f(a)$ ($f(x)\ge f(a)$), pentru orice $x\in V_\varepsilon(a)\cap A$.

Punctele de maxim (minim) local ale funcției f se numesc ***puncte de extrem local*** ale ei.

Dacă a este punct de maxim (minim) local al funcției f, atunci valoarea respectivă $f(a)$ se numeşte ***maxim*** (***minim***) ***local*** al acestei funcții. Maximurile (minimurile) locale

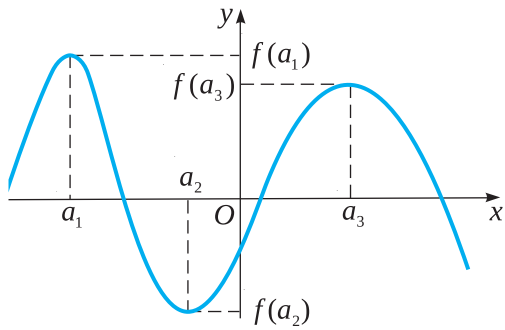


Fig. 5.7

ale funcției se numesc ***extremele locale*** ale acesteia. În figura 5.7, a_2 este punct de minim local, iar a_1, a_3 sînt puncte de maxim local ale funcției f.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că $x_0 = -\frac{b}{2a}$ este punct de maxim local al funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

Rezolvare:

În punctul $-\frac{b}{2a}$ avem $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, iar pentru orice $x \in \left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon, -\frac{b}{2a} + \varepsilon\right)$ este adevărat $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, deci $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Prin urmare, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ este punct de maxim local pentru f.

2. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$, are minimuri locale în punctele –1, 5 şi maxim local în punctul 2.

Rezolvare:

Explicit, această funcție se scrie astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty) \\ -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9, \text{ dacă } x \in (-1, 5). \end{cases}$$

Cum $f(-1) = f(5) = 0$ şi $f(x) \geq 0 = f(-1) = f(5)$ pentru $x \in \mathbb{R}$ (deci şi pentru valorile lui x din orice vecinătăți ale punctelor –1 şi 5), rezultă că –1 şi 5 sînt puncte de minim local ale funcției f şi $y_{\min} = f(-1) = 0$.

Examinăm $V_1 = (1{,}5;\ 2{,}5)$ – o vecinătate a punctului 2. Pentru orice $x \in V_1$ avem $f(x) = -(x-2)^2 + 9 \leq 9 = f(2)$, deci 2 este punct de maxim local al funcției f şi $y_{\max} = f(2) = 9$.

Observație. Funcția strict monotonă pe un interval nu are extreme pe acest interval.

2.7. Funcții bijective. Inversa unei funcții. Funcții inversabile

Fie funcțiile:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = |x|$; $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $h(x) = |x| = x$.

S-ar părea că funcțiile f, g, h se deosebesc puțin, însă ele au proprietăți distincte importante.

Pentru funcția f:

a) există $x_1 \neq x_2$, astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$;

b) există elemente din codomeniu care nu au preimagini în $D(f)$.

Pentru funcția g: orice element din codomeniu are preimagine în $D(g)$.

Pentru funcția h: orice element din codomeniu are preimagine în $D(h)$ şi doar o unică preimagine.

Definiție. Funcția $f: A \to B$ se numeşte **funcție injectivă** dacă $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$.

Altfel zis, elementele din B pot avea nu mai mult decît o preimagine în A.

Definiție. Funcția $f: A \to B$ se numeşte **funcție surjectivă** dacă pentru orice y din B există x din A, astfel încît $f(x) = y$.

Altfel zis, fiecare element din B are cel puțin o preimagine în A.

Definiție. Funcția $f: A \to B$ se numeşte **funcție bijectivă** dacă ea este injectivă şi surjectivă.

Exemple

1. Funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

2. Funcția g este surjectivă: orice $y \in \mathbb{R}_+$ are două preimagini: y şi $-y$; $g(y) = g(-y) = |-y| = y$.

Ea însă nu este injectivă, fiindcă $y \neq -y$ $(y \neq 0)$, dar $g(y) = g(-y)$.

3. Funcția h este surjectivă şi injectivă: nu există $x_1 \neq x_2$, astfel încît $h(x_1) = h(x_2)$, fiindcă din $h(x_1) = h(x_2)$, adică $|x_1| = |x_2|$, rezultă că $x_1 = x_2$. Astfel, h este bijectivă.

Funcțiile bijective $f: A \to B$ au o proprietate deosebită: fiecărui element $x \in A$, în mod unic, îi corespunde un element $f(x) \in B$, şi invers, fiecărui element $y \in B$ îi corespunde un unic element $x \in A$, astfel încît $f(x) = y$.

Deci, se poate defini funcția $g: B \to A$:

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \; y \in B, \; x \in A. \qquad (1)$$

Astfel, dacă funcția f „trasează căi” de la A la B, atunci funcția g „trasează căi” de la B la A, inverse celor trasate de f. Dacă mulțimile A şi B sînt finite, atunci relația (1) poate fi reprezentată cu ajutorul diagramelor (fig. 5.8).

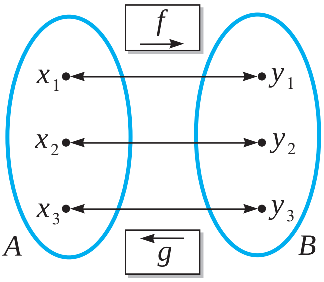


Fig. 5.8

Definiție. Funcția $g: B \to A$ se numeşte **inversa funcției** $f: A \to B$ dacă $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \; y \in B, \; x \in A$.

Inversa funcției f se notează cu f^{-1}. Evident, funcția f este inversa funcției f^{-1}. Funcțiile f şi f^{-1} se numesc ***funcții inverse***. (Nu confundați f^{-1} cu $\frac{1}{f}$!)

Definiție. Funcția care posedă funcție inversă se numeşte **funcție inversabilă**.

Examinînd compunerea funcțiilor $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ în condițiile (1), obținem:

$$\begin{cases}(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y, \ y \in B; \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x, \ x \in A.\end{cases} \qquad (2)$$

Folosind funcțiile identice ε_A, ε_B ale mulțimilor A și B, scriem relațiile (2) astfel:

$$f \circ g = \varepsilon_B, \ g \circ f = \varepsilon_A.$$

Din acest motiv, funcția g (notată f^{-1}) este inversă pentru f și respectiv funcția f (notată g^{-1}) este inversă pentru g.

Dacă funcția $f\colon A \to B$ este definită printr-o formulă, atunci inversabilitatea, precum și inversa ei pot fi determinate, ținînd cont de (1), în modul următor:

1) din relația $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$, variabila x se exprimă prin y și se obține $x = g(y)$;
2) dacă această relație asigură o exprimare unic determinată a lui x prin y, atunci funcția f este inversabilă;
3) schimbînd locurile variabilelor x și y în formula $x = g(y)$ (pentru a păstra notațiile acceptate), obținem formula $y = g(x)$, care definește funcția inversă $g\colon B \to A$ pentru funcția f.

Exercițiu rezolvat

Să se determine inversa funcției $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Rezolvare:

Pentru a determina inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, din egalitatea $y = \sqrt{x-1}$ exprimăm variabila x prin y și obținem $x = y^2 + 1$. Variabila x este unic determinată. Schimbînd locurile variabilelor x și y, obținem $y = x^2 + 1$, adică $f^{-1}(x) = x^2 + 1$. Prin urmare, inversa funcției f este $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = x^2 + 1$.

***Proprietăți ale funcțiilor inverse* $f\colon A \to B$ și $f^{-1}\colon B \to A$**

1° Inversa unei funcții (dacă există) este unică.

2° $D(f) = E(f^{-1}) = A$, $D(f^{-1}) = E(f) = B$.

3° Graficele funcțiilor f și f^{-1} sînt simetrice față de dreapta de ecuație $y = x$.

4° Ambele funcții f și f^{-1}, concomitent, sînt strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Exemplu

În figura 5.9 sînt reprezentate graficele funcțiilor inverse

$$f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+, \ f(x) = \sqrt{x-1}, \text{ și}$$

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty), \ f^{-1}(x) = x^2 + 1,$$

simetrice față de dreapta de ecuație $y = x$.

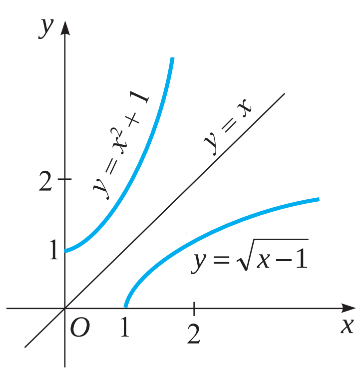


Fig. 5.9

2.8. Funcții mărginite

Definiții. • Funcția $f: A \to B$ se numește **mărginită inferior** (**mărginită superior**) dacă există un astfel de număr real m (M), numit **minorant** (**majorant**), încît pentru orice $x \in A$ este adevărată inegalitatea $m \le f(x)$ ($f(x) \le M$).

• Funcția mărginită inferior și superior se numește **funcție mărginită**.

Exercițiu rezolvat

Să se arate că:

a) funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior;

b) funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, este mărginită.

Rezolvare:

a) $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Atunci $f(x) \ge -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, fiindcă $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, funcția f este mărginită inferior de numărul $m = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Pentru a arăta că funcția f nu este mărginită superior, examinăm ecuația $f(x) = t$ cu parametrul $t \ge m$: $f(x) = t \Leftrightarrow a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = t - m$. Ultima ecuație are soluții, întrucît membrul drept ia valori nenegative (pentru valori oricît de mari ale lui t). Astfel, funcția f poate lua valori oricît de mari, deci ea nu este mărginită superior.

b) Aflăm mulțimea valorilor funcției f, adică aflăm valorile parametrului t pentru care ecuația $f(x) = t$ are soluții în $D(f)$.

Fie $\dfrac{x^2}{x^2+1} = t$. Atunci $\dfrac{x^2}{x^2+1} = t \Leftrightarrow (t-1)x^2 + t = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{t}{1-t}$, $t \ne 1$. Ultima ecuație are soluții dacă $t \in [0, 1)$. Prin urmare, $E(f) = [0, 1)$. Aceasta înseamnă că pentru orice $x \in D(f)$ avem $0 \le f(x) < 1$ și că funcția f este mărginită inferior de 0 și superior de 1, adică este mărginită.

Proprietățile unor funcții elementare, studiate la treapta gimnazială, precum și unele proprietăți ale acestora examinate recent, utilizarea lor vor fi prezentate în modulul 7.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se determine, eventual utilizînd graficul, intervalele de monotonie ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x - 3$; b) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$; c) $f(x) = |x|$.

2. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției:

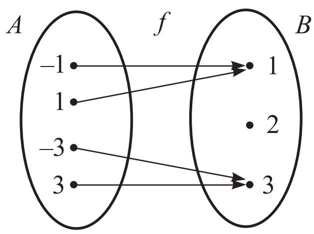
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$.

3. Să se determine zerourile funcțiilor din ex. **1**, **2**.

4. Să se identifice domeniul de definiție al funcției:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x+2}$; b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{2-x}$; c) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{2-x}$.

5. Fie funcția:



Să se descopere regula care asociază fiecărui element din A un element din B și să se definească funcția f în mod analitic.

B

6. Să se determine, eventual utilizînd definiția monotoniei, intervalele de monotonie ale funcției $f: D\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; b) $f(x)=\{x\}$.

7. Funcțiile $f, g: D\to\mathbb{R}$ sînt crescătoare pe domeniul D. Să se decidă care din funcțiile $f+g,\ f-g,\ f+f,\ -f,\ f^3,\ f^2,\ g\circ f$ de la D la $\mathbb{R}$ sînt monotone pe D.

8. Funcția $f: D\to\mathbb{R}$ este crescătoare și pozitivă pe D. Să se arate că:

a) f^2 este crescătoare pe D; b) $\sqrt{f}$ este crescătoare pe D; c) $\frac{1}{f}$ este descrescătoare pe D.

9. Să se afle extremele locale ale funcției:

a) $f: \mathbb{R}\to(0, 1),\ f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=|x^2-x|$.

10. Care din funcțiile $f_i: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ i=\overline{1, 4},\ f_1(x)=[x],\ f_2(x)=\{x\},\ f_3(x)=\left\{\frac{1}{2}x\right\},\ f_4(x)=\{5x\}$, sînt periodice? Să se determine perioadele principale ale funcțiilor periodice.

11. Să se studieze paritatea funcției $f: D\to E$:

a) $f(x)=x^3+2x$; b) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}$; c) $f(x)=x^2+x+1$.

12. Să se demonstreze că dacă $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție periodică și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție oarecare, atunci compusa $g\circ f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este funcție periodică. Este aceasta adevărat și pentru funcția $f\circ g$? Să se dea exemple.

13*. Să se reprezinte ca sumă a două funcții, una pară și alta impară, funcția $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^2-x+3$; b) $f(x)=x-2$.

14. Să se demonstreze că funcția f este inversabilă și să se determine funcția inversă respectivă:

a) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; b) $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt[4]{x}$;

c) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$; d*) $f: \mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x)=\frac{x}{x-2}$.

15*. Fie funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=|x-1|$.

a) Să se decidă dacă funcția f este bijectivă.

b) Să se determine dacă este bijectivă funcția $f_1: M\to\mathbb{R}_+,\ f_1(x)=|x-1|,\ M=[1, +\infty)$ (restricția lui f la M).

Exerciții și probleme recapitulative

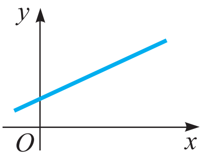
A

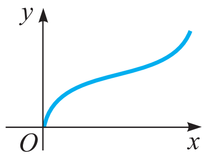
1. Să se afle $D(f), E(f)$ pentru funcția f definită în mod analitic:

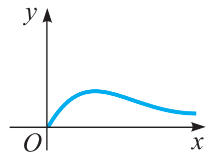
a) $f(x)=0{,}5x-3;$ b) $f(x)=\frac{1}{x}+3;$ c) $f(x)=x^2-3x.$

2. Pentru funcțiile f din ex. **1** să se determine, eventual utilizînd graficele, intervalele (maxim posibile) pe care ele sînt crescătoare, descrescătoare.

3. Fie y cantitatea de energie electică consumată de la începutul anului calendaristic de către o întreprindere, x – timpul care s-a scurs de la începutul anului.
Care din graficele de mai jos ar putea reprezenta dependența dintre y și x?

a) 

b) 

c) 

4. Să se afle intervalele de semn constant ale funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3-\frac{2-x}{3+x};$ b) $f(x)=2-\frac{2+x}{4-x};$ c) $f(x)=6-\frac{x-2}{4+x}.$

5. Să se determine extremele locale ale funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=-x^2+2x;$ b) $f(x)=3x+x^2;$ c) $f(x)=x^2+6x.$

B

6. Fie funcțiile $f(x)=x+2,\ g(x)=3-x.$ Să se determine suma, diferența, produsul și compusele $f\circ g,\ g\circ f$ ale acestor funcții.

7. Să se studieze paritatea funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\frac{1}{x};$ b) $f(x)=x^2+x;$ c) $f(x)=x^5+2x.$

8. Să se reprezinte sub formă de funcție compusă a două funcții (diferite de cele identice) funcția $\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $\Phi(x)=(x^7+2)^{\frac{3}{2}};$ b) $\Phi(x)=\frac{1}{x^4+3x^2+1}.$

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

În itemii 1, 5 indicați litera care corespunde variantei corecte.

1. Domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x-1},$ este mulțimea 1

A $(0,1)\cup(1,2).$ **B** $[0,1].$ **C** $[1,2)\cup(2,+\infty).$ **D** $[1,2].$

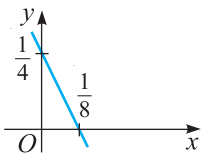
2. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|1-x|,$ este strict monotonă pe unele din intervalele $(1,+\infty),$ $(0,+\infty),\ (-\infty,+\infty),\ (-1,1).$ Determinați intervalul de monotonie maxim posibil. 2

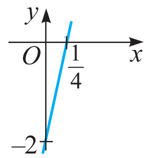
3. a) Determinați care din punctele $0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ sînt puncte de extrem local ale funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x$. 2

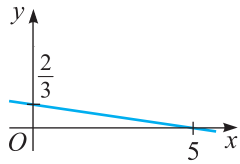
b) Aflați extremele locale respective ale funcției.

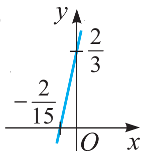
4. Determinați zerourile funcției $f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-4}{x-2} + 4 - x$. 2

5. Graficul (schematic) al funcției $f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + \frac{1}{4}$, este 1

A


B


C


D


6. Stabiliți intervalele de semn constant ale funcției $f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{5-x}{x-4}$. 2

B

În itemii 1, 5, 6 indicați litera care corespunde variantei corecte.

1. Domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$, este mulțimea 1

A $(0, 1) \cup (1, 2)$. **B** $[0, 1]$. **C** $[1, 2) \cup (2, +\infty)$. **D** $[1, 2]$.

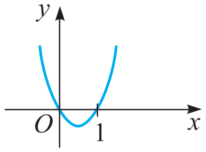
2. Reprezentați funcția $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x + 4$, ca o compusă a două dintre funcțiile $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = \overline{1, 4},\ f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = x + 4,\ f_3(x) = x + 5,\ f_4(x) = \sqrt{x}$. 2

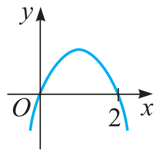
3. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, este strict monotonă pe unele din intervalele $(1, +\infty)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-1, 1)$. Determinați intervalul de monotonie maxim posibil. 1

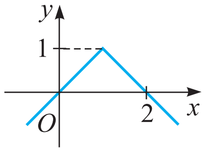
4. a) Determinați care din punctele $0, -1, 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ sînt puncte de extrem local ale funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. 2

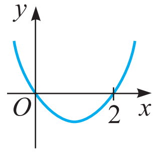
b) Aflați extremele locale respective ale funcției.

5. Graficul (schematic) al funcției $f\colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x$, este 1

A


B


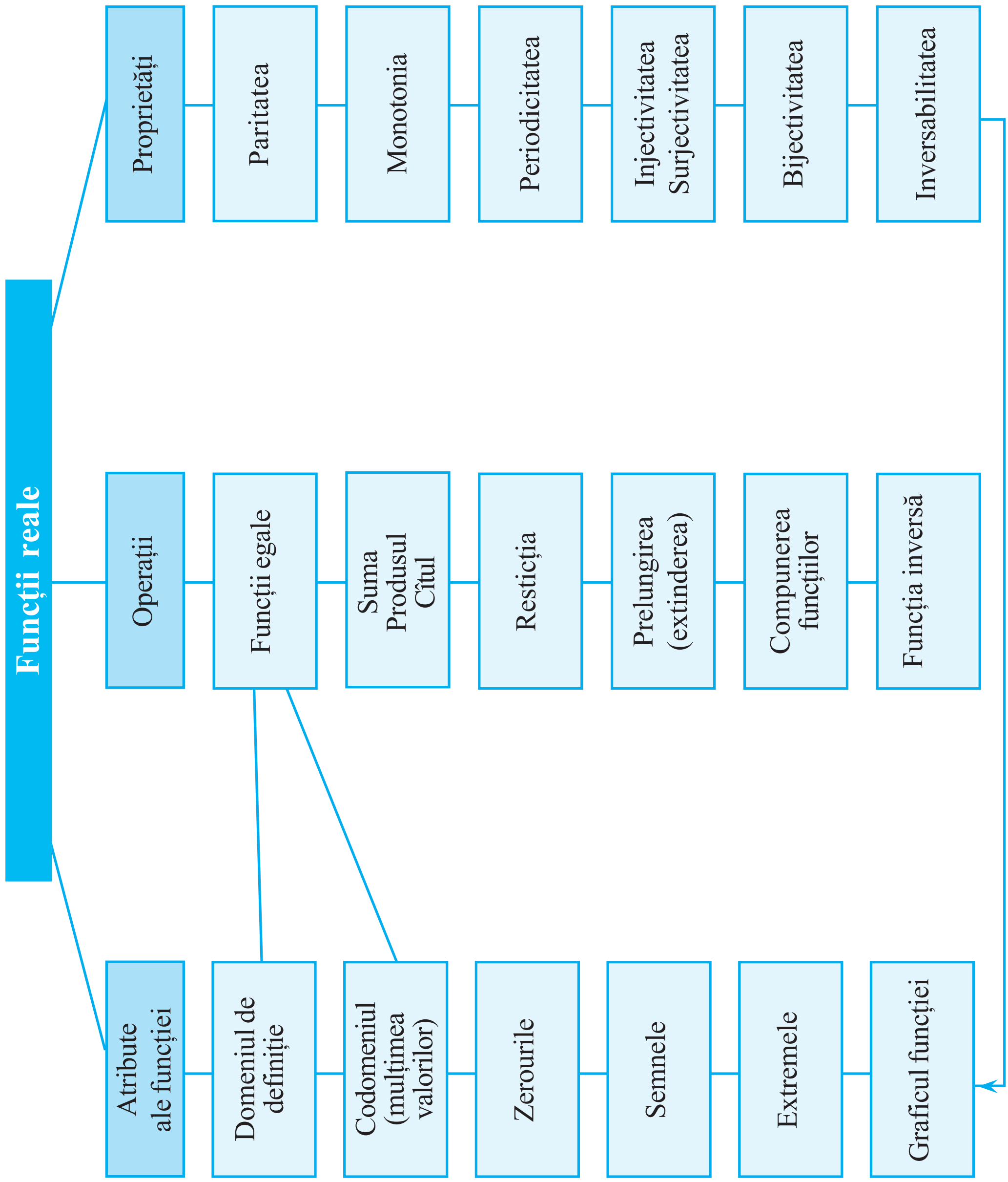
C


D


6. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x$, este 1

A pară. **B** impară. **C** nici pară, nici impară.

7. Determinați intervalele de semn constant ale funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x$. 2


Funcții reale
Proprietăți
Paritatea
Monotonia
Periodicitatea
Injectivitatea
Surjectivitatea
Bijectivitatea
Inversabilitatea
Operații
Funcții egale
Suma
Produsul
Cîtul
Resticția
Prelungirea
(extinderea)
Compunerea
funcțiilor
Funcția inversă
Atribute
ale funcției
Domeniul de
definiție
Codomeniul
(mulțimea
valorilor)
Zerourile
Semnele
Extremele
Graficul funcției

MODULUL 6

Ecuații. Inecuații. Sisteme. Totalități

Nimic întîmplător nu se întîmplă
în viața noastră neîntîmplătoare...
În ceruri ecuația e simplă?
Dar ce-ncîlceli mai jos – în furnicare!...

Iulian Filip

Obiective

- recunoaşterea şi utilizarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților în diverse situații;
- aplicarea terminologiei aferente noțiunilor *ecuație*, *inecuație*, *sistem*, *totalitate* în diverse contexte;
- utilizarea relațiilor de echivalență la rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților;
- aplicarea noțiunilor *ecuație*, *inecuație*, *sistem*, *totalitate* în situații reale şi/sau modelate.

§1 Ecuații. Recapitulare şi completări

1.1. Noțiunea de ecuație

Să amintim unele noțiuni necesare pentru rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuațiilor.

Definiții. • Egalitatea de forma $A(x)=B(x)$, unde $A(x)$, $B(x)$ sînt expresii în care apare necunoscuta x, se numeşte **ecuație cu o necunoscută**.

• Se numeşte **soluție** a ecuației cu o necunoscută valoarea necunoscutei care transformă această ecuație într-o egalitate numerică adevărată.

• Mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație se numeşte **domeniul valorilor admisibile** (**DVA**) al acestei ecuații.

Mulțimea de numere în care se caută soluțiile unei ecuații, de regulă, se precizează în enunțul problemei (în majoritatea cazurilor această mulțime este DVA).

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi toate soluțiile ei (în mulțimea de numere indicată).

Vom nota cu S mulțimea soluțiilor ecuației.

Observație. Soluții ale ecuației pot fi numai acele valori ale necunoscutei (necunoscutelor) care aparțin DVA al ecuației, de aceea, de regulă, rezolvarea ecuației începe cu determinarea DVA.

Menționăm că ecuația nu are soluții, dacă DVA al ei este mulțimea vidă.

Definiție. Două **ecuații** se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Echivalența ecuațiilor $A_1(x) = B_1(x)$ şi $A_2(x) = B_2(x)$ se notează cu simbolul „$\Leftrightarrow$" astfel: $A_1(x) = B_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

Observație. Dacă ecuațiile echivalente se rezolvă într-o mulțime M, atunci ele se numesc ***echivalente în mulțimea M***.

Echivalența ecuațiilor, de regulă, se va examina în DVA al ecuației inițiale. În particular, ecuațiile care nu au soluții sînt echivalente.

Definiție. Fie ecuațiile $A_1(x) = B_1(x)$ şi $A_2(x) = B_2(x)$.
Ecuația a doua $A_2(x) = B_2(x)$ se numeşte **consecință** a primei ecuații $A_1(x) = B_1(x)$ dacă fiecare soluție a primei ecuații este soluție şi a ecuației a doua.

Se notează: $A_1(x) = B_1(x) \Rightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

1.2. Ecuații raționale

Expresia de forma $\frac{P}{Q}$, unde P, Q sînt polinoame, $\operatorname{grad} Q \geq 1$, se numeşte ***rațională***.

Definiții. • Ecuația $E_1(x) = E_2(x)$, unde $E_1(X)$, $E_2(X)$ sînt polinoame de o nedeterminată, se numeşte **ecuație algebrică** cu o necunoscută.

• Ecuația $E_1(x) = E_2(x)$, unde expresiile $E_1(x)$, $E_2(x)$ sînt raționale sau una din ele este algebrică şi alta rațională, se numeşte **ecuație rațională** (**ecuație cu necunoscuta la numitor**).

Algoritmul de rezolvare a acestui tip de ecuații este următorul:

① se determină DVA al ecuației;

② se trec toți termenii în membrul stîng al ecuației;

③ se scrie membrul stîng sub forma $\frac{A}{B}$;

④ se aplică regula raportului nul: $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0; \end{cases}$

⑤ se rezolvă ecuația obținută $(A = 0)$;

⑥ se verifică dacă valorile obținute aparțin DVA;

⑦ se scrie mulțimea soluțiilor.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$. Avem $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$.

Aducem membrul stîng la acelaşi numitor: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=0$.

Obținem ecuația $x^2-2x-3=0$, cu soluțiile $x_1=3$, $x_2=-1$.

Valoarea 3 nu aparține DVA, deci ea nu este soluție a ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{-1\}$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Se ştie că lungimea rîului Prut este cu 363 km mai mică decît lungimea rîului Nistru.
a) Care este lungimea fiecărui rîu, dacă suma lungimilor lor este de 2 341 km?
b) Ce porțiune din rîurile Prut şi Nistru traversează teritoriul Republicii Moldova? (Utilizați harta geografică.)

2. Să se afle rădăcinile reale ale polinomului $P(X)$:
a) $P(X)=3X-2$; b) $P(X)=X^2+1$; c) $P(X)=(X-1)^3(X^2-1)$.

3. Să se determine zerourile funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^3-1$; b) $f(x)=2x+1$; c) $f(x)=(x+3)^3$.

4. Populația unei culturi bacteriologice (în momentul de timp $t=0$) este de 2 400 de indivizi. Peste 5 h 30 min., numărul lor a crescut pînă la 22 200 de indivizi.
a) Să se exprime numărul de indivizi în funcție de timp (măsurat în ore).
b) Să se afle peste cîte ore numărul de indivizi va deveni egal cu 56 400.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $8(x+4)=3-2x$; b) $5x+2=2(x-8)$; c) $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$;
d) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$; e) $x^3-2=x^3-2$; f) $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}$;
g) $3x^2-8x=0$; h) $x^2-12x+120=0$; i) $2x^2-8=0$.

6. Perimetrul unui triunghi dreptunghic este de 84 cm, iar ipotenuza lui este de 37 cm. Să se afle aria triunghiului.

7. Un lot de pămînt de formă dreptunghiulară cu aria de $2\,080\ \text{m}^2$ a fost împrejmuit cu un gard de lungimea 184 m. Să se afle lungimea şi lățimea lotului.

8. O barcă cu motor a parcurs 46 km pe un rîu, în direcția curentului de apă, şi 10 km pe un lac în 1 h 30 min. Să se determine viteza bărcii, dacă viteza apei este de 5 km/h.

B

9. Să se compună o ecuație de gradul II care are soluțiile:

a) $x_1=-1,\ x_2=2$; b) $x_1=3,\ x_2=1$; c) $x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

10. Într-o soluție, care conținea 40 g de sare, s-au turnat 200 g de apă şi astfel concentrația soluției s-a micşorat cu 10%. Ce cantitate de apă conținea soluția inițială şi care era concentrația ei?

11. Conform graficului nou de circulație a autobuzelor, un autobuz parcurge distanța de 325 km cu 40 min. mai rapid. Să se afle viteza medie cu care se deplasează autobuzul conform noului grafic, dacă se ştie că ea este cu 10 km/h mai mare decît viteza medie prevăzută de graficul precedent.

12. Să se compună o ecuație algebrică ce:

a) are o unică soluție; b) are trei soluții distincte; c) nu are soluții.

13*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x^3-7x^2-7x+2=0$; b) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$.

14*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x(13-x)(13+x^2)=42(x+1)^2$.

15*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{5x-1}{m-1}+\frac{5x-2}{m-2}+\ldots+\frac{5x-n}{m-n}=\frac{5xn}{m}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{R}^*_-$.

§2 Sisteme, totalități de ecuații

2.1. Noțiunea de sistem de ecuații

Problemă. La un aprozar erau 1 200 t de cartofi şi morcovi. După ce s-au vîndut 150 t de cartofi şi 40 t de morcovi, cartofi au rămas de trei ori mai mulți decît morcovi. Cîte tone de cartofi şi cîte tone de morcovi erau la început?

Rezolvare:

Fie x numărul inițial de tone de cartofi şi y numărul inițial de tone de morcovi. Atunci, conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x+y=1\,200, \\ x-150=3(y-40), \end{cases}$$

cu soluția (292,5; 907,5). (Verificați!)

Răspuns: 292,5 t de cartofi şi 907,5 t de morcovi.

Fie ecuațiile cu două necunoscute $E_1(x,\ y)=0,\ E_2(x,\ y)=0.$ Se cere să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de valori (a, b) ale necunoscutelor, care satisfac fiecare din ecuațiile date.

În asemenea cazuri se spune că este dat ***un sistem de două ecuații cu două necunoscute***. Acesta se scrie: $\begin{cases} E_1(x,\ y)=0, \\ E_2(x,\ y)=0. \end{cases}$

Tratări similare sînt şi pentru sistemul de trei, patru etc. ecuații cu trei, patru etc. necunoscute. În continuare vom studia şi rezolva diverse tipuri de sisteme de ecuații.

Definiție. Se numeşte **soluție** a sistemului de două (trei) ecuații cu două (trei) necunoscute perechea ordonată (a, b) de valori (tripletul ordonat (a, b, c) de valori) ale necunoscutelor care este soluție a fiecărei ecuații din sistemul dat, cu alte cuvinte, care transformă fiecare ecuație într-o egalitate numerică adevărată.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a găsi toate soluțiile lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor din sistem.

Un sistem de ecuații se numeşte ***compatibil*** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o mulțime finită de soluții se numeşte ***compatibil determinat***, iar cel care admite o infinitate de soluții se numeşte ***compatibil nedeterminat***.

Un sistem de ecuații care nu are soluții se numeşte ***incompatibil***.

Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile (DVA) al sistemului.

Domeniul de valori admisibile al sistemului de ecuații este ***intersecția*** domeniilor de valori admisibile ale ecuațiilor sistemului.

Definiție. Două sisteme de ecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sînt egale.

Sistemele incompatibile sînt echivalente.

Vom enumera unele ***transformări fundamentale care păstrează echivalența sistemelor***. Fie o mulțime M (în particular DVA) în care ecuațiile sistemului au sens.

I Schimbînd ordinea ecuațiilor unui sistem, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

II Înlocuind o ecuație a sistemului printr-o ecuație echivalentă cu aceasta, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

III Exprimînd într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin celelalte necunoscute şi substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem alcătuit din ecuația inițială şi cele noi formate, care este echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

IV Înlocuind o ecuație a unui sistem cu o ecuație care se obține în urma adunării algebrice (adunării sau scăderii ecuațiilor membru cu membru) a ecuației date cu orice altă ecuație a sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

Amintim ***metodele principale de rezolvare a sistemelor de ecuații***:
a) ***metoda substituției*** (a se vedea transformarea echivalentă III);
b) ***metoda reducerii***, bazată pe transformarea echivalentă IV;
c) ***metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare***;
d) ***metoda grafică***.

2.2. Totalități de ecuații (sisteme)

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$x^2(x-1)(x+2)=0. \tag{1}$$

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Un produs de doi sau mai mulți factori este egal cu zero, dacă cel puțin unul din factori este egal cu zero. Prin urmare, obținem $x^2=0$ sau $x-1=0$, sau $x+2=0$. Aşadar, se pune problema de a afla toate valorile necunoscutei care satisfac cel puțin una din aceste ecuații. În cazul dat se spune că avem de rezolvat o totalitate de trei ecuații cu o necunoscută. Ea se notează:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x-1=0, \\ x+2=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Fie ecuațiile $E_1(x)=0$ şi $E_2(x)=0$. Dacă se cere să se afle toate valorile necunoscutei x care satisfac cel puțin una din aceste ecuații, atunci se spune că e dată o ***totalitate de ecuații*** şi acest fapt se scrie astfel: $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=0 \\ E_2(x)=0 \end{array}\right.$ sau se pune semnul „ ; ” între ecuații: $E_1(x)=0;\ E_2(x)=0$.

Notații similare se folosesc pentru totalități de trei, patru etc. ecuații şi pentru totalități de sisteme de ecuații.

Mulțimea soluțiilor unei totalități de ecuații (***sisteme***) (notată cu S) este ***reuniunea*** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor (sistemelor) din această totalitate.

Să rezolvăm totalitatea (2) în DVA al ecuației inițiale:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in \text{DVA}, \\ x=1\in \text{DVA}, \\ x=-2\in \text{DVA}. \end{array}\right.$$

Atunci $S=\{-2, 0, 1\}$ este mulțimea soluțiilor ecuației (1).

Prezentăm încă două ***transformări echivalente*** (care păstrează echivalența ecuațiilor):

V Ecuația $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0$ este echivalentă în DVA cu totalitatea de ecuații $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=0, \\ E_2(x)=0, \\ \ldots \\ E_n(x)=0. \end{array}\right.$

VI Ecuația $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2$ este echivalentă în DVA cu totalitatea de ecuații $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=E_2(x), \\ E_1(x)=-E_2(x). \end{array}\right.$

Observație. Este important să sesizăm că, în cazul în care o ecuație se reduce la o totalitate de ecuații, mulțimea de soluții a ecuației date este formată numai din soluțiile totalității care aparțin DVA al ecuației inițiale.

În contextul noțiunii *totalitate de sisteme de ecuații*, la rezolvarea sistemelor de ecuații se aplică şi ***metoda descompunerii***. De exemplu, dacă o ecuație a sistemului este echivalentă în DVA al sistemului cu o totalitate de două (trei etc.) ecuații, atunci sistemul dat este echivalent în DVA al lui cu o totalitate de două (trei etc.) sisteme, care se obțin din cel inițial prin înlocuirea ecuației respective cu ecuațiile din totalitate.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}3x-y=2,\\(2x+y)^2=9.\end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases}3x-y=2\\(2x+y)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\\left[\begin{array}{l}2x+y=3\\2x+y=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=3\end{cases}\\\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}\\\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=-\dfrac{13}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\left\{(1,1),\ \left(-\frac{1}{5},-\frac{13}{5}\right)\right\}.$

2.3. Sisteme omogene de ecuații

Definiții. • Polinomul $P(X, Y, ..., U, V)$ de gradul n în nedeterminatele $X, Y, ..., U, V$ se numeşte **polinom omogen** dacă pentru orice sistem de valori numerice $(x, y, ..., u, v)$ ale nedeterminatelor şi orice valoare numerică fixată $\lambda\in\mathbb{R}^*$ are loc identitatea:

$$P(\lambda x, \lambda y, ..., \lambda u, \lambda v)=\lambda^n P(x, y, ..., u, v).$$

• Ecuația algebrică $P(x, y, ..., u, v)=0$ se numeşte **ecuație omogenă** de gradul n dacă polinomul $P(X, Y, ..., U, V)$ este un polinom omogen de gradul n.

• Sistemul de două ecuații algebrice cu două necunoscute de forma

$$\begin{cases}a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+...+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=c,\\b_0x^n+b_1x^{n-1}y+b_2x^{n-2}y^2+...+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n=d,\end{cases}$$

$a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n\in\mathbb{R},\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,$ se numeşte **sistem omogen** de gradul n (membrii stîngi ai ambelor ecuații ale sistemului sînt polinoame omogene de gradul n).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x^2+4xy-y^2=-2,\\x^2-3xy=4.\end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este omogen de gradul doi.

DVA: $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Înmulțim prima ecuație cu 2, apoi adunăm ecuațiile și obținem sistemul $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy = 4, \end{cases}$ echivalent cu cel inițial, care conține o ecuație omogenă.

Împărțim prima ecuație la x^2 ($x \neq 0$, deoarece $x = 0$ nu este soluție) și obținem ecuația de gradul II $3 + 5\left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$, cu soluțiile $\frac{y}{x} = 3$ și $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$.

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea totalității de sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$$

Primul sistem nu are soluții. (Verificați!)

Sistemul al doilea are soluțiile: $(-2\sqrt{0{,}4},\ \sqrt{0{,}4})$; $(2\sqrt{0{,}4},\ -\sqrt{0{,}4})$. (Verificați!)

Răspuns: $S = \{(-2\sqrt{0{,}4},\ \sqrt{0{,}4});\ (2\sqrt{0{,}4},\ -\sqrt{0{,}4})\}$.

2.4. Sisteme simetrice de ecuații

Definiție. Ecuația cu două necunoscute se numește **simetrică** dacă, înlocuind x cu y și y cu x, ecuația nu se modifică.

De exemplu, ecuațiile $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 5$ și $x + y - 3 = 0$ sînt simetrice.

Definiție. Sistemul format din ecuații simetrice se numește **sistem simetric**.

Observație. Deoarece ecuațiile cu două necunoscute ale unui sistem simetric nu se modifică la înlocuirea lui y cu x sau a lui x cu y, rezultă că dacă (a, b) este soluție a sistemului simetric, atunci (b, a) de asemenea este o soluție a acestui sistem.

Sistemul simetric cu două necunoscute poate fi rezolvat prin metoda utilizării necunoscutelor auxiliare.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -2, \\ x + y + 2xy = 1. \end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este simetric. Fie $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$ Obținem sistemul $\begin{cases} u^2 - 3v = -2, \\ u + 2v = 1. \end{cases}$

Substituind $u = 1 - 2v$ în prima ecuație, obținem ecuația $(1 - 2v)^2 - 3v + 2 = 0$, cu soluțiile $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{3}{4}$. Atunci $u_1 = -1$, $u_2 = -\frac{1}{2}$.

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea totalității de două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2}, \\ xy = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ambele sisteme sînt incompatibile în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; deci sistemul inițial nu are soluții.
Răspuns: $S=\varnothing$.

Observație. Rezolvarea sistemelor omogene de ecuații şi a sistemelor simetrice de ecuații se reduce, de regulă, la rezolvarea totalităților de sisteme.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se stabilească dacă sînt echivalente sistemele:

a) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=0,\\(x-y)(x+y)=16\end{cases}$ şi $\begin{cases}x^2-xy+y^2=0,\\x^2-y^2=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2-xy=0,\\2x-y=1\end{cases}$ şi $\begin{cases}x^3-x^2y=0,\\2x-y=1.\end{cases}$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-3y-8=0,\\4x+y-2=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=-4,\\xy=3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-y=1,\\x^2+y^2=41;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-y=2,\\x^3-y^3=8.\end{cases}$

3. Să se rezolve prin metoda descompunerii sistemul:

a) $\begin{cases}x^2-y^2=5,\\(x-y)^2=9;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-xy=-2,\\(x+y)^2=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}|3x-1|-y=0,\\x+xy=1.\end{cases}$

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(x^2-6x+5)(x^2-4)=0.$

5. Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații.
Dintr-un port s-au pornit concomitent două nave: una spre sud, iar cealaltă – spre est, deplasîndu-se rectiliniu şi uniform. Peste două ore, distanța dintre ele era de 60 km. Să se afle viteza fiecărei nave, dacă se ştie că viteza primei nave este cu 6 km/h mai mare decît viteza navei a doua.

6. Pentru 4 caiete şi 15 manuale s-au plătit 530 lei, iar pentru 3 caiete şi 10 manuale – 360 lei. La ce preț se vînd manualele şi caietele?

7. Dacă într-o sală se aşază cîte 3 persoane la o masă, rămîn 5 mese libere, iar dacă se aşază cîte 2 persoane, rămîn 5 persoane fără locuri. Cîte mese şi cîte persoane sînt în sală?

8. Doi muncitori, lucrînd împreună, execută o comandă în 12 zile. Dacă o jumătate din această comandă este îndeplinită de un muncitor, iar a doua jumătate – de celălalt muncitor, atunci toată comanda este executată în 25 de zile. În cîte zile poate executa integral comanda fiecare muncitor aparte?

9. Două echipe de elevi, lucrînd împreună, pot strînge roada de pe un lot experimental în 4 zile. În cîte zile ar face acest lucru fiecare echipă aparte, dacă una din ele ar strînge recolta cu 6 zile mai repede decît cealaltă echipă?

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-1\right)\left(\frac{x}{2-x}-\frac{1}{x}-2\right)=0.$$

B

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul omogen de ecuații:

a) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+xy=0, \\ 2x^2+xy-y^2=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul simetric de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y+xy=23, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=2, \\ x^2+y^2=12. \end{cases}$

Propuneți cîteva metode de rezolvare a sistemului c).

13. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} (x-y)xy=30, \\ (x+y)xy=120; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6, \\ 3x^2+8y^2=14; \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x|+2|y|=3, \\ 5y+7x=2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x|-3|y-4|=8, \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2|x-3|-y=1, \\ x^2-|y-1|=0. \end{cases}$

14. Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații:

a) Două uzine trebuie să producă într-o lună, conform planului, 360 de piese. Prima uzină a îndeplinit planul cu 112%, iar a doua – cu 110%. Ambele uzine au produs în total 400 de piese. Cîte piese a produs fiecare uzină peste plan?

b) La o uzină, pentru a produce un motor electric de tip A, se folosesc 2 kg de cupru şi 1 kg de plumb, iar pentru a produce un motor electric de tip B – 3 kg de cupru şi 2 kg de plumb. Cîte motoare de fiecare tip au fost produse, dacă s-au folosit în total 130 kg de cupru şi 80 kg de plumb?

15. Să se compună un sistem (o totalitate) de ecuații care:

a) are o unică soluție; b) are o infinitate de soluții;
c) are soluția (2, 3); d) nu are soluții.

16. La arderea în exces a oxigenului cu 1,10 g amestec de metanol şi etanol se obțin 0,896 *l* de dioxid de carbon (IV), calculat în condiții normale. Să se determine compoziția cantitativă a amestecului în unități de masă.

a) Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații.

b) Să se rezolve problema cu ajutorul ecuației.

17*. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi să se discute după parametrii reali a, b, c sistemul:

a) $\begin{cases} (a-1)x+y=a, \\ 2x-(a+1)y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3,\ a\neq 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2xy=a, \\ 2yz=b, \\ 4zx=c,\ \ a, b, c>0. \end{cases}$

§3 Inecuații cu o necunoscută. Recapitulare şi completări

3.1. Noțiunea de inecuație

Problemă. Înălțimea la care ajunge o minge aruncată vertical în sus se calculează conform formulei $h(t) = -5t^2 + 12t + 2$, unde h se măsoară în metri, iar t este timpul (măsurat în secunde), considerat din momentul aruncării. Cîte secunde se va afla mingea la înălțimea nu mai mică decît 6 m?

Rezolvare:

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm intervalul de timp pentru care $h(t) \geq 6$. Astfel, rezolvăm inecuația $-5t^2 + 12t + 2 \geq 6$ sau inecuația $5t^2 - 12t + 4 \leq 0$. Obținem $t \in [0{,}4;\ 2]$. (Verificați!) Atunci mărimea intervalului de timp este $2 - 0{,}4 = 1{,}6$ (secunde).

Răspuns: 1,6 secunde.

Definiție. **Inecuație cu o necunoscută** se numeşte inegalitatea ce conține o necunoscută.

Forma generală a unei inecuații (aici şi în continuare cu o necunoscută) este $f(x) > g(x)$ sau $f(x) < g(x)$, sau $f(x) \geq g(x)$, sau $f(x) \leq g(x)$, unde $f(x)$, $g(x)$ sînt expresii matematice.

Definiții. • Mulțimea valorilor necunoscutei pentru care au sens (există) toate expresiile inecuației se numeşte **domeniul valorilor admisibile (DVA)** al acestei inecuații.

• Numărul a se numeşte **soluție a inecuației cu o necunoscută** dacă el transformă inecuația într-o inegalitate numerică adevărată (într-o propoziție adevărată).

A rezolva o inecuație cu o necunoscută înseamnă a determina toate soluțiile ei. Vom nota cu S mulțimea soluțiilor inecuației.

Definiție. Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Inecuațiile cu o necunoscută care nu au soluții sînt echivalente.

La rezolvarea inecuațiilor, este util să cunoaştem cele mai importante ***transformări echivalente***:

I $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0;$

II $f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x);$

III $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ pentru $a \in \mathbb{R},\ a > 0;$

IV $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ pentru $a \in \mathbb{R},\ a < 0;$

V $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^n(x) > g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)},\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ pentru $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ și n număr natural;

VI $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^n(x) > g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)},\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$ pentru n număr natural impar.

Afirmații similare sînt adevărate și pentru inecuațiile de tipul

$$f(x) \geq g(x),\ f(x) < g(x),\ f(x) \leq g(x).$$

Atenție! Deoarece la rezolvarea inecuațiilor verificarea în cazul unui număr infinit de soluții este practic imposibilă, va fi mai eficient să nu admitem transformări care conduc la obținerea soluțiilor străine sau la pierderea soluțiilor. Prin urmare, transformările efectuate trebuie să fie echivalente.

Exercițiu. Formulați verbal transformările echivalente I–VI.

3.2. Inecuații raționale. Metoda intervalelor de rezolvare a inecuațiilor cu o necunoscută

Definiție. Inecuațiile de tipul $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, unde $P(X)$, $Q(X)$ sînt polinoame în nedeterminata X, $\operatorname{grad} Q(X) \geq 1$, se numesc **inecuații raționale**.

Inecuațiile raționale pot fi rezolvate prin diferite metode.

1 **Considerarea semnului cîtului $\frac{P(x)}{Q(x)}$**

De exemplu, pentru inecuația $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ avem de rezolvat o totalitate de două sisteme de inecuații (noțiunile de totalitate, sistem de inecuații vor fi examinate mai jos): $\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} P(x) < 0, \\ Q(x) < 0. \end{cases}$

2 **Considerarea echivalențelor de tipul**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

3 O metodă eficientă de rezolvare a inecuațiilor raționale este **metoda intervalelor**.

Fie funcția f definită prin formula $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, unde, de exemplu,

$a < b < c < d$ şi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dacă $x > d$, atunci fiecare din factorii $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ este pozitiv, deci pe intervalul $(d, +\infty)$ avem $f(x) > 0$. Dacă $c < x < d$, atunci $x - d < 0$, iar ceilalți factori sînt pozitivi. Rezultă că $f(x) < 0$ pe intervalul (c, d). În mod analog, pe intervalul (b, c) avem $f(x) > 0$ (fig. 6.1). Se spune că în punctul c *funcția* f *îşi schimbă semnul*.

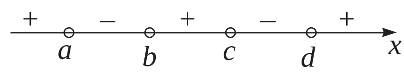


Fig. 6.1

Similar avem pentru punctele a, b, d (fig. 6.1).

Schimbarea semnului funcției f poate fi reprezentată grafic prin „curba semnelor” (fig. 6.2), care se construieşte de la dreapta spre stînga, începînd cu intervalul din dreapta.

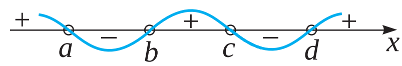


Fig. 6.2

Reprezentarea din figura 6.2 se interpretează astfel: pe intervalele unde „curba semnelor” e situată mai sus de axa numerelor este adevărată inegalitatea $f(x) > 0$, iar pe intervalele unde „curba semnelor” este situată mai jos de axa numerelor avem $f(x) < 0$.

Aceste raționamente nu depind de numărul de factori de gradul întîi ce apar la numărător şi numitor, nici de amplasarea reciprocă a zerourilor numărătorului şi numitorului. De aceea aceste raționamente sînt adevărate şi pentru funcția f definită prin formula

$$f(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)}, \qquad (1)$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sînt numere reale distincte. Pentru această funcție de asemenea se va construi „curba semnelor”.

Observație. La aplicarea metodei intervalelor este important să ținem cont de următoarele: numai în cazul în care funcția este de tipul (1), adică toți coeficienții necunoscutei x sînt egali cu 1 şi toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sînt distincte, „curba semnelor” se construieşte începînd cu intervalul din dreapta, situîndu-se deasupra axei numerelor. În celelalte cazuri, semnul funcției pe fiecare interval se va determina prin „valori de control”, substituite în formula ce defineşte funcția inițială.

La rezolvarea inecuațiilor raționale prin metoda intervalelor vom proceda conform următorului ***algoritm***:

① prin transformări echivalente, aducem inecuația inițială la o inecuație cu membrul drept egal cu 0, al cărei membru stîng este o expresie de tipul (1);

② determinăm funcția f şi aflăm zerourile numărătorului;

③ determinăm valorile în care funcția f nu este definită (zerourile numitorului);

④ zerourile numărătorului şi numitorului divizează axa numerelor (în caz general, DVA al inecuației inițiale) în intervale;

⑤ construim „curba semnelor”;

⑥ selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcției f;

⑦ scriem răspunsul.

În cazul în care în (1) unele din numerele $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ sînt egale, adică (1) ia forma $f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}...(x-c_t)^{k_t}$, $k_1, k_2, ..., k_t \in \mathbb{Z}^*$, la construirea „curbei semnelor” aplicăm următoarea regulă:

- dacă k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, este număr par, atunci la „trecerea peste zeroul c_i” semnul funcției f nu se schimbă;
- dacă k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, este număr impar, atunci la „trecerea peste zeroul c_i” semnul funcției f se schimbă în opus.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{x(3-x)(x+4)^4}{x^2-5x+6} \geq 0.$

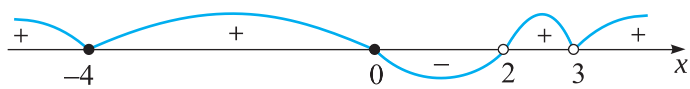
Rezolvare:

Transformăm membrul stîng al inecuației și obținem $\dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)} \leq 0.$ Fie funcția f definită prin formula $f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)}$. Prin urmare, trebuie să aflăm valorile lui x pentru care $f(x) \leq 0$.

Zerourile numărătorului sînt 0, 3, –4, iar ale numitorului sînt 2, 3.

Conchidem că în 0 și 2 funcția f își schimbă semnul, iar în –4 și 3 semnul ei rămîne neschimbat.

„Curba semnelor” este următoarea:



Deci, $f(x) \leq 0$ pentru $x \in [0, 2) \cup \{-4\}$.

Răspuns: $S=\{-4\} \cup [0, 2)$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $3x-15-2(x+4)>6-x$;

b) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{2}<\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{15}$;

c) $x-3-\dfrac{3x+7}{2} \geq \dfrac{4x-1}{2}$;

d) $(x-6)(x+1) \leq (x-1)(x+6)$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{1}{x} \geq 1$; b) $\dfrac{x(x-2)}{3x-1} \leq 0$; c) $\dfrac{x}{1-x}<0$; d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1} \geq 0$; e) $x \geq \dfrac{1}{x}$.

B

3. Un fermier vrea să îngrădească un ocol pentru animale de forma unui trapez isoscel. Laturile neparalele ale trapezului au lungimea de 10 m, iar baza mare este de 1,5 ori mai lungă decît baza mică. Ce lungime trebuie să aibă baza mică pentru ca lungimea gardului să fie mai mare decît 50 m?

4. Să se determine care din propozițiile următoare sînt false. Depistați greşeala.

a) Dacă $x^2 \geq 16$, atunci $x \geq 4$.   b) Dacă $x^2 < 25$, atunci $x < 5$.

c) Dacă $x^2 > 1$, atunci $x < 1$.   d) Dacă $5 - x \geq 4$, atunci $x \geq 1$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{x(x-1)^3(x+2)}{x^2-1} \leq 0$;   b) $\dfrac{3x^2-5x+7}{x^3+1} > 0$;   c) $\dfrac{2x^2-x-3}{-x^2-7x+8} \geq 0$.

6. Să se compună o inecuație cu necunoscuta la numitor, avînd mulțimea soluțiilor:

a) $S = [-1, 1]$;   b) $S = (-\infty, 0]$;   c) $S = \varnothing$;   d) $S = \mathbb{R}$.

§ 4 Sisteme, totalități de inecuații cu o necunoscută. Recapitulare şi completări

4.1. Sisteme de inecuații cu o necunoscută

Să ne amintim ce este un sistem de inecuații cu o necunoscută.

Fie două inecuații $A(x) > 0$ şi $B(x) > 0$ cu o necunoscută. Dacă se pune problema de a determina mulțimea valorilor necunoscutei x ce satisfac *ambele inecuații*, atunci se spune că avem de rezolvat un sistem de două inecuații cu o necunoscută.

Sistemul respectiv se notează: $\begin{cases} A(x) > 0, \\ B(x) > 0. \end{cases}$ (1)

Observații. **1.** Fiecare inecuație a sistemului (1) poate avea unul din semnele: „≥”, „≤”, „<”.

2. Sistemul de inecuații poate să conțină două sau mai multe inecuații.

Definiție. Orice valoare a necunoscutei care satisface *toate* inecuațiile sistemului se numeşte **soluție** a sistemului de inecuații cu o necunoscută.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații cu o necunoscută (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

Definiție. Două sisteme de inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Sistemele de inecuații care nu au soluții sînt echivalente.

Observație. Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc ***echivalente în această mulțime***.

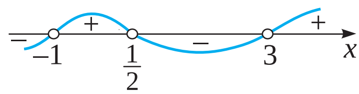
Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{(x-3)(x+1)} < 0, \\ x^2+1 \geq 0. \end{cases}$

Rezolvare:

Determinăm DVA al sistemului: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 3\}$.

Aplicăm metoda intervalelor şi aflăm soluțiile primei inecuații:



Astfel, $x\in(-\infty, -1)\cup\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

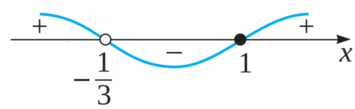
Inecuația a doua are soluțiile $x\in(-\infty, +\infty)$. (Demonstrați!)

Răspuns: $S=(-\infty, -1)\cup\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} 2x+9>x+7, \\ \dfrac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\le 0. \end{cases}$

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.



Soluțiile primei inecuații sînt $x\in(-2, +\infty)$.

Soluțiile inecuației a doua sînt $x\in\left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Prin urmare, soluțiile sistemului sînt $x\in(-2, +\infty)\cap\left(-\frac{1}{3}, 1\right]=\left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Răspuns: $S=\left(-\frac{1}{3}, 1\right]$.

4.2. Totalități de inecuații cu o necunoscută

Fie două inecuații $A(x)<0$ şi $B(x)<0$ cu o necunoscută. Dacă se pune problema de a determina mulțimea valorilor necunoscutei, astfel încît fiecare valoare a necunoscutei să fie soluție *cel puțin a unei dintre inecuații*, atunci se spune că avem de rezolvat o totalitate de două inecuații cu o necunoscută.

Totalitatea respectivă se notează: $\left[\begin{array}{l} A(x)<0, \\ B(x)<0. \end{array}\right.$ (2)

Observații. **1.** Fiecare inecuație a totalității (2) poate avea unul din semnele: „≥”, „>”, „≤”.

2. Totalitatea de inecuații poate să conțină două sau mai multe inecuații.

Definiție. Orice valoare a necunoscutei care verifică *cel puțin* o inecuație a totalității se numeşte **soluție** a totalității de inecuații cu o necunoscută.

A rezolva o totalitate de inecuații înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.

Mulțimea soluțiilor unei totalități de inecuații cu o necunoscută (notată cu S) este ***reuniunea*** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestei totalități.

Definiție. Două totalități de inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Totalitățile care nu au soluții sînt echivalente.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de inecuații $\left[\begin{array}{l} 2x+9>x+7, \\ \dfrac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\le 0. \end{array}\right.$

Rezolvare:

Prima inecuație are soluțiile $x\in(-2,+\infty)$, iar a doua – soluțiile $x\in\left(-\frac{1}{3}, 1\right]$. Reuniunea mulțimilor soluțiilor ambelor inecuații este mulțimea $(-2,+\infty)\cup\left(-\frac{1}{3}, 1\right]$. Prin urmare, soluțiile totalității sînt: $x\in(-2,+\infty)$.

Răspuns: $S=(-2,+\infty)$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se determine dacă sînt echivalente sistemele:

a) $\begin{cases} -2x+1\le 0, \\ \dfrac{x}{x-1}>1 \end{cases}$ și $\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ \dfrac{1}{x-1}>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+1<0, \\ x(x-1)\le 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} x^3(x^2-1)>0, \\ \dfrac{1}{x^2+4}<0. \end{cases}$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $-1\le 3x-1\le 8$; b) $0<x(x-3)\le 4$; c) $-3\le\dfrac{x}{2-x}<0$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x-3)(2-x)}\ge 0, \\ 3x-1<2(x+1); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-12x+120\ge 0, \\ (x-5)(x+6)<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\le\dfrac{1}{x}, \\ 3x-1>5-\dfrac{2}{x}. \end{cases}$

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de inecuații:

a) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{(x-3)(2-x)}\ge 0, \\ 3x-1<2(x+1); \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{x}\ge 0, \\ -4x+4\le 0; \end{array}\right.$ c) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)(x+2)>0, \\ x^2+x\le 0, \\ -x+5<0. \end{array}\right.$

5. Să se afle valorile lui x, $x\in\mathbb{R}$, pentru care există triunghiuri cu laturile de lungime $3x+1$, $x+3$, $4x-2$.

B

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} (x-3)^2\le 0, \\ \dfrac{x^3+x^5}{x+1}>1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(2-x)}{(x-2)(x-3)}>0, \\ x(x-1)(x-2)\le 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3(x-5)-6\ge\dfrac{1}{2}x, \\ \dfrac{5}{x}<1, \\ x(x-1)\ge 2. \end{cases}$

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{7-5x}{5-x} \le 4+\frac{x}{x-5}-\frac{3x}{25-x^2} \le 4$;   b) $-3 \le \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} < 1$.

8. O barcă cu motor a parcurs pe un rîu 10 km în direcția curentului de apă şi 6 km în sens contrar. Viteza apei este de 1 km/h. În ce limite trebuie să fie cuprinsă viteza bărcii pentru ca toată călătoria să se încadreze între 3 şi 4 ore?

9. Să se compună un sistem de inecuații cu o necunoscută, care are mulțimea soluțiilor:

a) $S=(-\infty, 2)\cup\{3\}$;   b) $S=\{-3, 0\}$;   c) $S=\varnothing$.

10*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} |3x-1|<x, \\ \frac{|x|}{(x-2)(x-3)} \ge 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x^2-1| \ge 8, \\ \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{(x-3)(4-x)} < 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{3}{x} < |x-1|, \\ 2x^2-|x|-1 \ge 0. \end{cases}$

11*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x^2-1} \le 0$.

Exerciții şi probleme recapitulative

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3{,}5(x-4)=4x+8$;   b) $5\frac{1}{4}-x=0{,}1\left(10-\frac{1}{2}x\right)$;   c) $\frac{1}{3}x=\frac{4}{7}-\frac{x}{5}$.

2. Să se transpună în limbaj matematic, apoi să se rezolve problema:

a) cu ajutorul ecuației;   b) prin sistem de ecuații.

1) Suma a două numere reale este 44. Să se afle numerele, dacă unul este cu 10 mai mare decît celălalt.

2) Diferența a două numere reale este 45. Să se afle numerele, dacă unul este de 10 ori mai mic decît celălalt.

3) În două aprozare sînt 520 t de mere. Dacă s-ar muta 60 t dintr-un aprozar în celălalt, cantitățile din cele două aprozare ar fi egale. Ce cantitate de mere se află în fiecare aprozar?

3. La o parcare sînt motociclete (cu două roți) şi autoturisme. În total sînt 48 de unități şi 168 de roți. Cîte motociclete şi cîte autoturisme sînt la parcare?

Să se rezolve problema:

a) prin metoda falsei ipoteze;

b) cu ajutorul ecuației;

c) prin compunerea unui sistem de ecuații.

4. Se ştie că punctele $A(3, -1)$ şi $B\left(1, \frac{1}{3}\right)$ aparţin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Să se afle coordonatele altui punct $C(x, y)$ care de asemenea aparține graficului funcției f.

5. Sergiu are 7 ani, iar tatăl lui are 39 de ani. Să se afle cîți ani Sergiu va rămîne mai mic decît $\frac{2}{3}$ din vîrsta tatălui.

6. O societate pe acțiuni are 3 acționari. Procentele respective de participare a acestora se raportă ca 2 : 3 : 5. Profitul societății în 2011 a constituit 450 000 lei. El a fost împărțit proporțional cu procentul de participare. Ce profit (în lei) a primit fiecare acționar pentru anul 2011?

7. Să se afle numerele reale x şi y, dacă se ştie că $2x - 3y = 1$ şi $x + 2y = -3$.

8. Să se determine rădăcinile reale ale polinomului:
a) $P(X) = (X^2 - 1)(3X^2 - X - 2)$; b) $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

9. Dacă vom înmulți trinomul $aX^2 - 2X + b$ cu trinomul $X^2 + aX - 1$, atunci vom obține un polinom de gradul patru în care coeficientul lui X^2 este 8, iar coeficientul lui X este –2. Să se afle a şi b.

10. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției:
a) $\frac{x-5}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \geq 0$; b) $\frac{x^2-4}{x+3} < 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x+3) < 0$.

B

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{5}{2}$; b) $\frac{x^2+2}{3x-2} - \frac{3x-2}{x^2+2} = \frac{8}{3}$.

12. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 2x - 5 = y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 2. \end{cases}$

13. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x^2y^2 + xy - 72 = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) = 15, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$

14. Pentru care valori reale ale lui m sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = m \end{cases}$
a) are o unică soluție; b) are două soluții; c) este incompatibil?

15. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$:
a) $x^2 - 10x + 1 > -x^2 - 7x - 1$; b) $5x^2 - 5x + 1 > -2x^2 + 5x - 6$.

16. Una din laturile unui dreptunghi este cu 7 cm mai mare decît cealaltă. Care poate fi lungimea acestei laturi, dacă aria dreptunghiului este mai mică decît $60\ \text{cm}^2$?

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Completați, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată: 1

$$\begin{cases} 3x-2y=-3 \\ x^2-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$$

2. Fie polinomul $P(X)=-3X^2-X+2$.

a) Aflați rădăcinile reale ale polinomului $P(X)$. 2

b) Scrieți un polinom de gradul doi ale cărui rădăcini sînt opusele rădăcinilor polinomului $P(X)$. 1

3. Fie funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$.

a) Aflați D_f. 1

b) Determinați pentru care valori reale ale lui x funcția f ia valori nenegative. 2

4. Un buchet de flori format din 3 lalele și 4 narcise costă 44 lei, iar un buchet format din 6 lalele și 3 narcise, la același preț, costă 63 lei. Cît costă o lalea și cît costă o narcisă? 3

B

1. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+xy=3, \\ xy^2-x^2y=-2. \end{cases}$ 2

2. Fie funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}+\dfrac{1}{x}$. 2

a) Aflați D_f.

b) Reprezentați grafic funcția f.

3. Din stațiile A și B, situate la o distanță de 600 km, pornesc concomitent unul spre celălalt două trenuri. Peste 6 ore, distanța dintre ele era de 60 km. Dacă trenul din A ar fi ieșit cu 1 oră 30 min. mai devreme decît cel din B, atunci trenurile s-ar fi întîlnit la mijlocul distanței dintre A și B. Aflați viteza fiecărui tren. 3

4. Fie sistemul $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}\geq 0, \\ -3x^2+\boxed{}<0. \end{cases}$ 3

a) Completați cu un număr real, astfel încît mulțimea soluțiilor sistemului să fie egală cu mulțimea soluțiilor primei inecuații.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul obținut după completare.

DVA

Soluții (ecuații)
- Reuniunea mulțimilor soluțiilor ecuațiilor (sistemelor) — Totalități de ecuații (sisteme)
- Intersecția mulțimilor soluțiilor ecuațiilor — Sisteme de ecuații

Soluții (inecuații)
- Intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor (sistemelor) — Sisteme de inecuații
- Reuniunea mulțimilor soluțiilor inecuațiilor — Totalități de inecuații (sisteme)

Metode de rezolvare

Ecuații	Inecuații
1. Aplicarea formulelor 2. Metoda grafică 3. Utilizarea necunoscutelor auxiliare 4. Metoda reducerii 5. Metoda substituției 6. Descompunerea în factori 7. Alte	1. Metoda intervalelor 2. Reducerea la inecuația (sistemul, totalitatea) echivalentă 3. Utilizarea necunoscutelor auxiliare 4. Alte

Echivalența

Ecuații

algebrice

I. Ecuații:

$ax+b=0,\ a\neq 0$

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$

ș.a.

Exemple:

$3x-1=0;\ \ 4x^2-6x=0;$

$x^2+x^2+x+1=0.$

II. Sisteme, totalități

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} ax+b=0, \\ ax^2+bx+c=0 \end{array}\right.$

ș.a.

raționale

I. Ecuații

$\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$, unde

$A(X), B(X)$ – polinoame.

Exemple:

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x+1}=0;\ \ x-\dfrac{2}{x}=3.$

II. Sisteme, totalități

$\begin{cases} x-\dfrac{1}{y}=5, \\ 3x+\dfrac{2}{y}=0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+x=5, \\ 2-\dfrac{1}{x+1}=3. \end{array}\right.$

simetrice

I. Ecuații

Exemple:

$x+y+xy=0;\ \ x^2+y^2=1.$

II. Sisteme simetrice de ecuații

Exemple:

$\begin{cases} 2x+2y-xy=0, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=-2. \end{cases}$

omogene

I. Ecuații

Exemple:

$2x+3y=0;\ \ x^2-xy+y^2=2.$

II. Sisteme omogene de ecuații

$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=2, \\ x^2-xy+2y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-y^3=0, \\ x^2y+xy^2=1. \end{cases}$

Inecuații

de gradul I

I. Inecuații

$ax+b>0,\ a\neq 0$

$ax+b\geq 0,\ a\neq 0$

$ax+b<0,\ a\neq 0$

$ax+b\leq 0,\ a\neq 0$

Exemplu:

$1-3x<-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>1.$

II. Sisteme, totalități

Exemple:

$\begin{cases} 6x-4>0 \\ 2-7x\leq 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x-0{,}3<0 \\ 2x-\sqrt{5}\geq 0 \end{array}\right.$

raționale

I. Inecuații

$\dfrac{A(x)}{B(x)}>0,\ \ \dfrac{A(x)}{B(x)}\leq 0$ ș.a.,

unde $A(X), B(X)$ – polinoame.

Exemplu:

$\dfrac{1}{x}>1$

II. Sisteme, totalități

Exemple:

$\begin{cases} \dfrac{2}{x}>0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}<0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{x-1}\leq 0 \\ x-\dfrac{1}{2x}>0 \end{array}\right.$

Alte ecuații, inecuații, sisteme, totalități

Ecuații (inecuații) cu modul

Ecuații (inecuații) cu parametru

Echivalența

MODULUL 7 Funcții elementare. Ecuații. Inecuații

Ceea ce cunoaştem este prea puțin,
Ceea ce nu ştim este imens.
Laplace

Obiective

- recunoaşterea funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților studiate în diverse contexte;
- aplicarea funcțiilor studiate şi a proprietăților acestora în rezolvări de probleme din diverse domenii;
- clasificarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților după diverse criterii;
- rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților prin metode adecvate;
- modelarea unor situații cotidiene şi/sau din diverse domenii cu ajutorul funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor studiate.

§1 Funcția de gradul I. Ecuații de gradul I. Inecuații de gradul I

1.1. Funcția de gradul I

Problemă. O firmă de taxi din municipiul Chişinău aplică următoarele tarife:
- la pornire – 12 lei,
- cursele în raza oraşului – 2,2 lei/km,
- cursele în afara oraşului – 4,2 lei/km.

a) Să se scrie formula ce determină dependența dintre costul y al călătoriei în raza oraşului şi distanța x parcursă cu taxiul.

b) Este oare această dependență funcțională? Ce tip de funcție avem?

c) Să se calculeze costul călătoriei cu taxiul a cuplului Petrescu de la domiciliu pînă în centrul oraşului, dacă distanța este de 10,3 km.

d) Este oare suficientă suma de 510 lei pentru a achita călătoria cu taxiul de la Chişinău pînă la Bălți, distanța dintre oraşe fiind de 120 km?

Rezolvare:

a) $y = 2{,}2x + 12$. (Argumentați!)

b) $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2{,}2x + 12$ – funcție de gradul I. (Argumentați!)

c) Cum $x = 10{,}3$, obținem $y = 2{,}2 \cdot 10{,}3 + 12 = 34{,}66$ (lei).

d) Avem $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4{,}2x + 12$. Deoarece $x = 120$, determinăm că suma de 510 lei nu este suficientă. (Verificați!)

Definiție. Se numește **funcție de gradul I** funcția de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Funcția de gradul I posedă următoarele proprietăți:

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° Graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $(0, b)$, iar axa Ox – în punctul $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

3° *Zeroul funcției*: $x_0 = -\frac{b}{a}$.

4° Dacă $a > 0$: $f(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

Dacă $a < 0$: $f(x) > 0$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

5° Funcția este impară doar dacă $b = 0$: $f(-x) = a \cdot (-x) = -f(x)$. În alte cazuri, ea nu este nici pară, nici impară.

6° *Monotonia*: Pentru $a > 0$ funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (din $x_1 < x_2$ rezultă consecutiv $ax_1 < ax_2$, $ax_1 + b < ax_2 + b$, $f(x_1) < f(x_2)$). Pentru $a < 0$ funcția este strict descrescătoare.

7° Funcția f nu este periodică, fiindcă ea este strict monotonă pe un interval nemărginit.

8° Din același motiv f nu are extreme locale.

9° Funcția f este bijectivă, deci este inversabilă.

10° Graficul funcției este o dreaptă. Poziția ei depinde de semnul pantei $a = \operatorname{tg}\alpha$: dacă $a > 0$, atunci dreapta formează un unghi ascuțit cu semiaxa pozitivă Ox (de la axa Ox în sens opus mișcării acelor de ceasornic) (fig. 7.1 a)), iar dacă $a < 0$, atunci acest unghi este obtuz (fig. 7.1 b)).

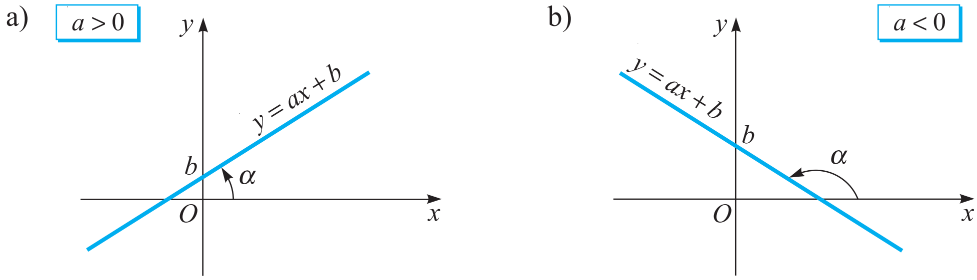


Fig. 7.1

1.2. Ecuații de gradul I. Inecuații de gradul I

Definiții. • Ecuația de tipul $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}$, se numeşte **ecuație liniară** (sau **ecuație afină**).

• Dacă $a\neq 0$, ecuația liniară se numeşte **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Sistemul de două ecuații de gradul I cu două necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Soluția sistemului este perechea ordonată de valori (a, b) ale necunoscutelor, care transformă fiecare ecuație a sistemului într-o egalitate numerică adevărată.

Amintim metodele de rezolvare a sistemelor de două ecuații de gradul I cu două necunoscute:
- ✓ metoda substituției;
- ✓ metoda reducerii;
- ✓ metoda grafică.

Definiție. Inecuațiile de tipul $ax+b<0,\ ax+b\leq 0,\ ax+b>0,\ ax+b\geq 0,\ a\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R}$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

De regulă, inecuațiile de gradul I se rezolvă prin efectuarea unor transformări echivalente.

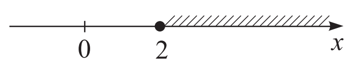
Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $3x-6\geq 0$.

Rezolvare:

$3x-6\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq 6 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Grafic, mulțimea soluțiilor se reprezintă astfel:



Răspuns: $S=[2,+\infty)$.

Mulțimea soluțiilor unui sistem (unei totalități) de inecuații de gradul I cu o necunoscută este intersecția (reuniunea) mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem (acestei totalități).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$: a) sistemul de inecuații $\begin{cases} 3(x-1)\geq x-6, \\ x>5x+4; \end{cases}$

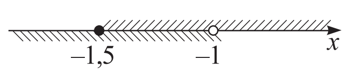
b) totalitatea de inecuații $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)\geq x-6, \\ x>5x+4. \end{array}\right.$

Rezolvare:

a) $\begin{cases} 3(x-1)\geq x-6 \\ x>5x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3\geq x-6 \\ 4x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq -3 \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1{,}5, \\ x<-1. \end{cases}$

Răspuns: $S=[-1{,}5;-1)$.

b) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)\geq x-6 \\ x>5x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq -1{,}5, \\ x<-1. \end{array}\right.$ Obținem:



Răspuns: $S=\mathbb{R}$.

1.3. Ecuații liniare cu parametru

Fie $F(x, a)=0$ o ecuație care conține necunoscutele x și a. Dacă se pune problema de a rezolva ecuația cu necunoscuta x pentru fiecare valoare a lui a, atunci $F(x, a)=0$ se numeşte ***ecuație cu necunoscuta x şi parametrul a***.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația, unde a este parametru real:

a) $ax=2$; b) $(a^2-9)x=a-3$.

Rezolvare:

a) 1) Dacă $a=0$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=2$, care nu are soluții, deci $S=\varnothing$.

2) Dacă $a\neq 0$, atunci obținem ecuația de gradul I $ax=2$, cu soluția $\frac{2}{a}$, deci $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$.

Răspuns: $S=\varnothing$ pentru $a=0$; $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}^*$.

b) $(a^2-9)x=a-3 \Leftrightarrow (a-3)(a+3)x=a-3$.

1) Dacă $a=3$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=0$, deci $S=\mathbb{R}$.

2) Dacă $a=-3$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=-6$, deci $S=\varnothing$.

3) Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$, atunci obținem ecuația de gradul I $(a-3)(a+3)x=a-3$, cu soluția $x=\frac{1}{a+3}$, deci $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$.

Răspuns: $S=\mathbb{R}$ pentru $a=3$; $S=\varnothing$ pentru $a=-3$;

$S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3{,}5(x-2)=8{,}(24)$; b) $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$; c) $-\frac{3}{4}+6x=2{,}(2)(x-1)$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin trei metode, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-y=3,\\ -3x+2y=-4;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-0{,}5x+2y=2,\\ 3x-y=-1.\end{cases}$

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $9(x-2)-3(2x+1)>5x$; b) $4(2x-1)-3(3x+2)>0$.

4. Fie funcțiile $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{12-x}{6}+1$, $g(x)=-2{,}5x+6$.

a) Să se afle zerourile funcțiilor f şi g.

b) Să se determine intervalele pe care $f(x)\geq 0$; $f(x)<0$; $g(x)\leq 0$; $g(x)>0$.

c) Să se afle coordonatele punctului de intersecție a graficelor G_f şi G_g.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)<g(x)$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases}f(x)\leq 0,\\ g(x)>0.\end{cases}$

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $(1-3x)(2{,}5x+6)=0$; b) $\left(3\frac{1}{5}x+10\right)\left(2-10\frac{1}{3}x\right)=0.$

6. Să se rezolve prin trei metode problema:
a) 25 de muncitori au primit pentru o zi de lucru 6 500 lei. Unii sînt plătiți cu 200 lei pe zi, iar ceilalți – de 1,5 ori mai mult. Cîți muncitori au primit cîte 200 lei?
b) Un bazin de 35,7 hl poate fi umplut de două robinete în 7 ore. Debitul (pe oră) al unui robinet este cu 90 *l* mai mare decît al celuilalt. Care este debitul fiecărui robinet?

7. Să se indice într-un sistem de axe ortogonale mulțimea punctelor:
1) ale căror abscise satisfac inecuația: a) $-3<x<2$; b) $-1\le x<6$;
2) ale căror ordonate satisfac inecuația: a) $-1<y<2$; b) $3<y\le 5$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: a) $P_{n-3}\cdot A_n^3=20P_{n-2}$; b) $C_{n-2}^2+C_{n-2}^3+C_{n-2}^4=0.$

B

9. Pentru care valori ale parametrului real *a* mulțimea soluțiilor ecuației $(a+1)x-8=0$ este:
a) $S=\{8\}$; b) $S=\{-2\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația, unde *a* este parametru real:
a) $ax=x+2$; b) $(a^2-1)x=2a^2+a-3$; c) $ax=a$; d) $2ax-1=x+3$.

11. Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+5$, $g(x)=1-2x$.
a) Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar g – strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
b) Să se determine valorile lui *x* pentru care graficul G_f este situat mai sus decît graficul G_g.

12. Pentru care valori ale parametrului real *a* sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+3y=-a \\ 3x+ay=8 \end{cases}$ are soluții nenegative?

13. Să se rezolve problema: a) cu ajutorul ecuației; b) prin compunerea unui sistem de ecuații.
Distanța dintre două stații este de 650 km. Un tren accelerat parcurge această distanță cu 12 ore mai repede decît un marfar, deoarece viteza acestuia este cu 24 km/h mai mare decît a marfarului. Să se afle viteza fiecărui tren.

14. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația: a) $C_{2n}^7>C_{2n}^5$; b) $C_{15}^{k-2}>C_{15}^k$.

15. Un aliaj din cupru şi cositor cu masa de 12 kg conține 45% de cupru. Cîte kilograme de cositor trebuie de adăugat la acest aliaj pentru a obține un aliaj ce conține 40% de cupru?

16. Avem două categorii de oțel: cu 5% de nichel şi cu 40% de nichel. Ce cantitate de oțel de fiecare din aceste categorii trebuie să luăm, astfel încît, fiind retopite, să obținem 140 t de oțel ce conține 30% de nichel?

17. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația, unde *a* este parametru real:
a) $\frac{2}{5x-a}=\frac{3}{ax-1}$; b) $a-2=\frac{3x+1}{x+1}$.

18*. Pentru care valori ale parametrului real *a* sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+(2a-1)y=2a \\ (2a+1)x+(a^2+2)y=2(a^2+a+1) \end{cases}$$

a) este compatibil nedeterminat; b) este compatibil determinat; c) este incompatibil?

§2 Funcția de gradul II. Ecuații de gradul II. Inecuații de gradul II

2.1. Funcția de gradul II

Definiție. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție de gradul II**.

Funcția de gradul II posedă următoarele proprietăți:

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° Dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, atunci graficul nu intersectează axa Ox, iar dacă $\Delta \geq 0$, atunci $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ și graficul intersectează axa Ox într-un punct sau în două puncte.

3° Fie $a > 0$. Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Dacă $\Delta \geq 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$, $x_1 \leq x_2$.

Fie $a < 0$. Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x) < 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Dacă $\Delta \geq 0$, atunci $f(x) > 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$ și $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $x_1 \leq x_2$.

4° Pentru $b = 0$ funcția este pară: $f(-x) = a(-x)^2 + c = f(x)$. În alte cazuri, ea nu este nici pară, nici impară.

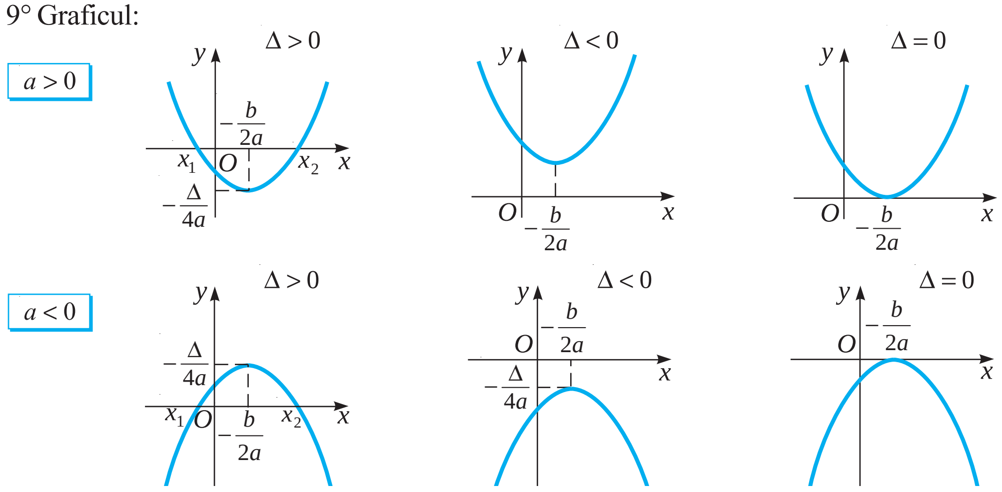
5° Pentru $a > 0$ funcția f este strict crescătoare pe $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$. Pentru $a < 0$ funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ și strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ (a se vedea modulul 5, teorema 2).

6° Funcția f nu este periodică, fiindcă este monotonă pe un interval infinit (nemărginit).

7° Dacă $a > 0$, atunci $y_{\min} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$, iar dacă $a < 0$, atunci $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ este punct de maxim local (a se vedea modulul 5, § 2) și $y_{\max} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

8° Funcția f nu este bijectivă.

9° Graficul:



2.2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

Definiție. Ecuația de tipul $ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ se numeşte **ecuație de gradul II**, iar a, b, c se numesc **coeficienții** ei.

Menționăm că soluțiile ecuației de gradul II sînt abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției de gradul II, asociate acestei ecuații, cu axa Ox.

Existența soluțiilor reale ale ecuației de gradul II, precum şi numărul lor depind de semnul discriminantul $\Delta=b^2-4ac$ al acestei ecuații.

1) Dacă $\Delta<0$, ecuația nu are soluții reale. Prin urmare, $S=\varnothing$.

2) Dacă $\Delta=0$, mulțimea soluțiilor conține un unic element: $x=-\dfrac{b}{2a}$. Deci, $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

3) Dacă $\Delta>0$, mulțimea soluțiilor ecuației conține două elemente: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Astfel, $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Împărțind ambii membri ai ecuației de gradul II $ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ la a, obținem ***ecuația de gradul II, forma redusă***: $x^2+px+q=0,\ p,\ q\in\mathbb{R}$.

Teorema 1 (teorema lui Viète)

Dacă $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0, \qquad (1)$$

atunci
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Dacă $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației

$$x^2+px+q=0, \qquad (3)$$

atunci
$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

Teorema 2 (reciproca teoremei lui Viète)

Dacă numerele reale $x_1,\ x_2$ verifică relațiile (2), atunci $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale $x_1,\ x_2$ verifică relațiile (4), atunci $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației (3).

2.3. Ecuații de gradul II cu parametru

Fie $F(x,\ a)=0$ ecuație de gradul II care conține necunoscutele x şi a. Dacă se pune problema de a rezolva ecuația cu necunoscuta x pentru fiecare valoare a lui a, atunci $F(x,\ a)=0$ se numeşte ***ecuație de gradul II cu necunoscuta x şi parametrul a***.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute după parametrul $a,\ a\in\mathbb{R}$, ecuația:

$$(a-1)x^2-2(2a-1)x+4a+3=0.$$

Rezolvare:

1) Analizăm situația cînd coeficientul lui x^2 ia valoarea zero, deoarece în acest caz ecuația inițială se transformă într-o ecuație de gradul I. Avem $a=1$.

Pentru $a=1$ obținem: $-2x+7=0 \Leftrightarrow x=3{,}5$.

2) Pentru $a\neq 1$ determinăm valorile lui *a*, astfel încît discriminantul ecuației să ia valoarea zero: $\Delta = 4(2a-1)^2-4(a-1)(4a+3) = -12a+16 = 0 \Leftrightarrow a = 1\frac{1}{3}$.

Dacă $a>1\frac{1}{3}$, atunci $\Delta<0$ şi ecuația nu are soluții reale.

Dacă $a<1\frac{1}{3}$ şi $a\neq 1$, atunci $\Delta>0$ şi ecuația are soluțiile $x_1=\frac{(2a-1)-\sqrt{4-3a}}{a-1}$, $x_2=\frac{(2a-1)+\sqrt{4-3a}}{a-1}$.

Răspuns: $S=\{3{,}5\}$ pentru $a=1$; $S=\varnothing$ pentru $a\in\left(1\frac{1}{3}, +\infty\right)$;

$S=\left\{\frac{2a-1-\sqrt{4-3a}}{a-1}, \frac{2a-1+\sqrt{4-3a}}{a-1}\right\}$ pentru $a\in(-\infty, 1)\cup\left(1, 1\frac{1}{3}\right)$;

$S=\{5\}$ pentru $a=1\frac{1}{3}$.

2.4. Interpretarea geometrică a unor ecuații de gradul II cu două necunoscute

Geometric, mulțimea soluțiilor unei ecuații cu două necunoscute reprezintă o mulțime de puncte într-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Forma figurii respective depinde de gradul ecuației şi de structura ei. Cele mai simple ecuații de gradul II cu două necunoscute şi figurile determinate de ele sînt reprezentate în figura 7.2.

Cu ajutorul ecuațiilor acestor figuri pot fi rezolvate diferite probleme.

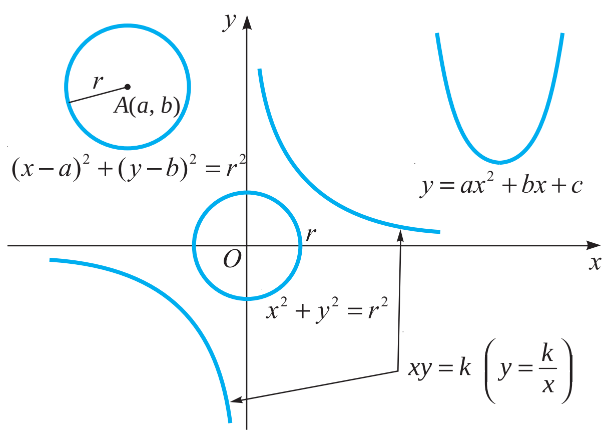


Fig. 7.2

Probleme rezolvate

1. O porțiune de drum se află pe dreapta $y=-4x+3$. O porțiune de cale ferată are forma hiperbolei $y=\frac{3}{x}$. Dacă drumul va fi construit (prelungit) în continuare, va intersecta el oare calea ferată?

Rezolvare:

Problema se reduce la determinarea punctelor de intersecție a dreptei şi hiperbolei respective. La rîndul său, aceasta se reduce la stabilirea compatibilității sistemului de ecuații: $\begin{cases} y=-4x+3, \\ y=\dfrac{3}{x}. \end{cases}$ Prin substituția lui y în ecuația a doua obținem sistemul $\begin{cases} y=-4x+3, \\ -4x+3=\dfrac{3}{x}. \end{cases}$

Cum ecuația a doua nu are soluții reale (Verificați!), rezultă că și sistemul nu are soluții. Deci, drumul prelungit rectiliniu nu va intersecta calea ferată.

2. Să se determine raza și centrul cercului tangent la axele de coordonate și la hiperbola $y=\dfrac{4}{x}$ (fig. 7.3).

Rezolvare:

Din considerente de simetrie, este clar că centrul cercului se va afla pe dreapta de ecuație $y=x$, deci coordonatele lui vor fi (a, a). Această dreaptă intersectează hiperbola în punctul A, ale cărui coordonate sînt soluție a sistemului: $\begin{cases} y=x, \\ y=\dfrac{4}{x}. \end{cases}$

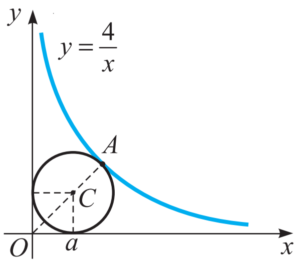


Fig. 7.3

Obținem $A_1(-2, -2)$, $A(2, 2)$. Observăm că $A_1(-2, -2)$ nu satisface condiția problemei. Centrul C al cercului va satisface condiția: $AC=a$, deci $\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=a$, $|a|<2$. Obținem $a=4-2\sqrt{2}$. Astfel, centrul cercului este $C(4-2\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2})$ și raza lui este $r=4-2\sqrt{2}$.

2.5. Ecuații ce conțin necunoscuta în modul

Vom expune unele metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

1 Aplicarea definiției modulului

Exemplu. $|x-2|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=5 \\ x-2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\{-3, 7\}$.

2 Folosirea relației $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Exemplu. $|x+3|=|2x-1| \Leftrightarrow (x+3)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{3}, \\ x=4. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\left\{-\dfrac{2}{3}, 4\right\}$.

3 Aplicarea relației $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Exemplu. $|x^2-x|=|4+2x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=4+2x \\ x^2-x=-4-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0 \\ x^2+x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\{-1, 4\}$.

4 Utilizarea necunoscutei auxiliare

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2-|x|-1=0$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie $|x| = t,\ t \geq 0$. Deoarece $x^2 = |x|^2$, obținem ecuația $2t^2 - t - 1 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{2}$. Revenim la necunoscuta x şi obținem: $\left[\begin{array}{l} |x| = 1 \\ |x| = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Răspuns: $S = \{-1, 1\}$.

5 Metoda intervalelor

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x-1| - 3|x+3| = 2x$.

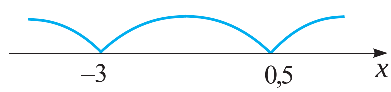
Rezolvare:

1) Determinăm DVA: $x \in \mathbb{R}$.

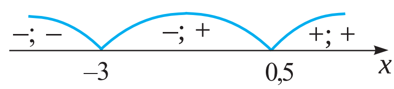
2) Aflăm zerourile expresiilor din modul:

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0{,}5;\qquad x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3.$

3) Zerourile obținute divizează axa numerelor (în caz general, DVA al ecuației inițiale) în intervalele $(-\infty; -3)$, $[-3; 0{,}5)$, $[0{,}5; +\infty)$:



4) Explicităm modulele pe fiecare interval:



5) Rezolvăm ecuația pe fiecare interval, luînd în considerație rezultatul explicitării modulelor pe intervalul respectiv.

Astfel, examinăm trei cazuri.

a) Pentru $x \in (-\infty, -3)$ avem $2x - 1 < 0$, $x + 3 \leq 0$. Deci, $|2x-1| = -(2x-1)$, $|x+3| = -(x+3)$ şi obținem:

$$-(2x-1) + 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow -x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \notin (-\infty, -3).$$

Aşadar, $x = 10$ nu este soluție a ecuației inițiale.

b) Pentru $x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right)$ avem $2x - 1 \leq 0$, $x + 3 \geq 0$ şi obținem:

$$-(2x-1) - 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow -7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7} \in \left[-3, \frac{1}{2}\right).$$

Prin urmare, $x = -\frac{8}{7}$ este o soluție a ecuației inițiale.

c) Pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ avem $2x - 1 \geq 0$, $x + 3 > 0$ şi obținem:

$$2x - 1 - 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Deci, $x = -\frac{10}{3}$ nu este soluție a ecuației inițiale.

6) Răspunsul reprezintă reuniunea mulțimilor soluțiilor obținute în fiecare caz.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

6 Metoda grafică

Exemplu

Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $|x^2-2x-3|=a$ are exact trei soluții reale.

Rezolvare:

Construim graficul funcției $f(x)=|x^2-2x-3|$ (fig. 7.4). Observăm că doar dreapta paralelă cu axa Ox de ecuație $y=4$ are 3 puncte comune cu graficul construit.

Astfel, pentru $a=4$ ecuația inițială are exact trei soluții reale.

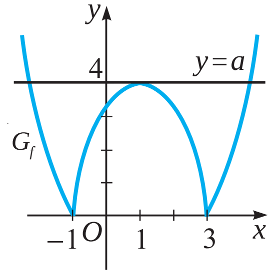


Fig. 7.4

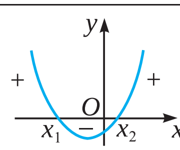
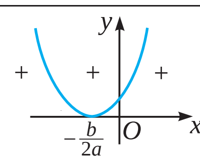
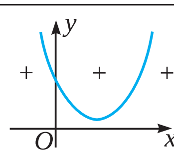
2.6. Inecuații de gradul II cu o necunoscută

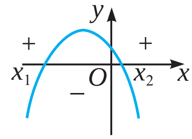
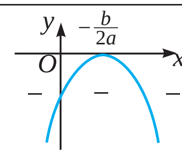
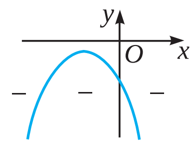
Definiție. Inecuațiile de tipul $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută**.

Vom analiza două metode de rezolvare a acestor inecuații.

1 Aplicarea studiului funcției

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. În tabel sînt prezentate mulțimile soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$, în funcție de semnul coeficientului a și al discriminantului $\Delta=b^2-4ac$, unde $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(\Delta\geq 0)$ sînt soluții ale ecuației $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

Valorile lui a	Valorile lui Δ	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$	Semnul funcției definite prin $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$
$a>0$	$\Delta>0$	$S=(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$	
	$\Delta=0$	$S=\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$	
	$\Delta<0$	$S=(-\infty, +\infty)$	

	$\Delta > 0$	$S = (x_1, x_2)$	
$a < 0$	$\Delta = 0$	$S = \varnothing$	
	$\Delta < 0$	$S = \varnothing$	

Observație. Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c \geq 0,\ a \neq 0,$ se obține prin reuniunea mulțimii soluțiilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ și mulțimii soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c > 0$. De exemplu, mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c \geq 0$ pentru $a > 0,\ \Delta > 0$ este $S = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$.

În mod analog obținem mulțimile soluțiilor celorlalte inecuații de gradul II.

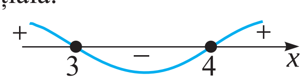
2 Metoda intervalelor

Vom explica aplicarea metodei intervalelor la rezolvarea în $\mathbb{R}$ a inecuației $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Soluțiile ecuației de gradul II $x^2 - 7x + 12 = 0$ sînt $x_1 = 3,\ x_2 = 4$. Descompunem expresia $x^2 - 7x + 12$ în factori: $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$. Prin urmare, am obținut inecuația $(x-3)(x-4) \leq 0$, echivalentă cu cea inițială.

Aplicînd metoda intervalelor, construim „curba semnelor”:



Prin urmare, $x \in [3, 4]$.

Răspuns: $S = [3, 4]$.

2.7. Inecuații ce conțin necunoscuta în modul

Vom examina unele metode de rezolvare a inecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

I Inecuația de tipul $|f(x)| \leq g(x)$ este echivalentă în DVA cu inecuația dublă $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, adică cu sistemul $\begin{cases} f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$

Exemplu

$|3x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 3x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Similar pentru semnul „<”.

2 Inecuația de tipul $|f(x)| \geq g(x)$ în DVA este echivalentă cu totalitatea
$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array}\right.$$

Exemplu

$$|2-x| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x \geq 3 \\ 2-x \leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty).$$

Similar pentru semnul „>”.

3 Utilizarea necunoscutei auxiliare

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x-1)^2 - 4|x-1| + 3 \leq 0$.

Rezolvare:

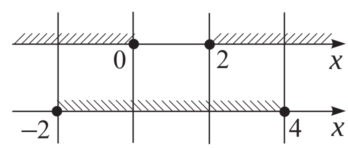
$(x-1)^2 = |x-1|^2$. Fie $|x-1| = t$, $t \geq 0$. Atunci obținem inecuația $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, cu soluțiile $t \in [1, 3]$, sau $1 \leq t \leq 3$.

Revenim la necunoscuta x şi obținem:
$$1 \leq |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-1| \geq 1, \\ |x-1| \leq 3. \end{array}\right.$$

Rezolvăm prima inecuație a sistemului:
$$|x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 1 \\ x-1 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Pentru inecuația a doua avem:

$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$.



Aşadar, soluțiile sistemului, deci şi ale inecuației inițiale, sînt: $x \in [-2, 0] \cup [2, 4]$.

Răspuns: $S = [-2, 0] \cup [2, 4]$.

4 Metoda intervalelor. Algoritmul de aplicare a acestei metode este similar cu cel aplicat la rezolvarea ecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se rezolve inecuația:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$; b) $3x^2 - x + 1 \leq 0$; c) $-2x^2 - x + 4 \leq 0$; d) $2x + 7 > 2x^2 + 8x + 11$.

2. Să se determine intervalele în care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ia valori pozitive (negative):

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = -2x^2 - 4x + \frac{5}{2}$; c) $f(x) = x^2 + 3x$.

3. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}\,x^2 - 2}}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3}}$.

4. O navă cosmică este lansată cu viteza inițială de 100 m/s. Dependența dintre distanța parcursă de navă și timp este (la etapa inițială) descrisă de funcția $h(t) = 100t - 4{,}9t^2$. Ce distanță a parcurs nava în primele 10 secunde?

5. Să se determine lungimile laturilor unui dreptunghi de arie maximă, dacă perimetrul lui este de 20 cm.

6. Să se scrie ecuația cercului de centru $A(4, 5)$, tangent la dreapta $y = 2x + 3$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x-8| = 2$; b) $|3x+1| = -5$;
c) $|x+2| = |x-3|$; d) $2|x-1| = |x-3| - |4-x|$;
e) $|x^2 - 5x + 4| = 2$; f) $|x(x-3)| = 4$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $|x-2| \le 3$; b) $5|2x+1| \ge -1$; c) $|-6(x+3)| > 4$;
d) $x^2 - 3|x| - 4 \le 0$; e) $|x| \cdot |x-1| \ge 20$; f) $|x-1| \cdot |x-2| < 6$.

9. Să se determine punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = |2x^2 - 3x + 1|$; b) $f(x) = 2|x|^2 - 3|x| + 1$.

10. O minge aruncată în sus cu viteza inițială de 72 m/s se va afla peste t secunde la înălțimea $h(t) = 72t - 4{,}9t^2$ (de la suprafața pămîntului).
a) Să se afle înălțimea la care se va afla mingea peste 5 s.
b) Peste cîte secunde mingea va cădea pe pămînt?

11. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$;
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{9 - x^2}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x+4} - \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

B

12. Să se rezolve prin metoda grafică și apoi să se verifice analitic soluțiile sistemului:
a) $\begin{cases} x^2 - 4x - 6y = 20, \\ xy = -8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 8x - 4y = 6, \\ y^2 + 5y - 5x = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + 6y = 36. \end{cases}$

13. a) Să se scrie ecuația cercului ce trece prin punctele $A(2, 0)$, $B(5, 0)$ și este tangent la axa Oy.
b) Să se afle coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y = -2x^2 - x - 6$ și $y = x^2 - 2$.
c) Să se afle coordonatele punctelor de intersecție a hiperbolei $yx = 2$ și cercului $x^2 + y^2 = 4$.

14. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x-1| - 3|x+4| = x$; b) $\big||2x+1| - 2x\big| = 3|x+2|$; c) $\dfrac{9}{|3x-1| - 8} = |3x-1|$.

15. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $|x^2 - 9x + 18| + x \ge 5$; b) $|2x-3| > |x-5| - 3|2-x|$; c) $|x-4| \ge |x+2|$;
d) $\dfrac{|x| \cdot (2 - |x-1|)}{(x-1)^3} > 0$; e) $|2x^2 - x - 1| \le 0$; f) $|1-3x| \cdot |x^2 - x| > 0$.

16. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul real a ecuația:
a) $|x-a| - 2|x-4| = 2$; b) $|x+2| + |3x-1| = a$.

17. Să se determine valorile reale ale lui a, astfel încît inecuația $ax^2+(a-1)x-(a-2)>0$ să nu aibă nici o soluție în $\mathbb{R}$.

18. Să se determine valorile parametrului real a pentru care inecuația $(a-1)x^2+(a+1)x-(a+1)>0$ este verificată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

19. Să se determine valorile reale ale lui a, astfel încît inecuația $x^2-(4a+1)x+(a+2)(3a-1)>0$ să fie verificată pentru orice $x<0$.

20. Să se afle valorile reale ale lui a pentru care inecuația $x+\dfrac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$ nu are soluții pozitive.

21*. Pentru funcția $f\colon(-\infty,-1]\to(-\infty,-2]$, $f(x)=-x^2-2x-3$, să se determine f^{-1}.

22. Fie cercul $x^2+y^2=9$. Să se scrie ecuația cercului care trece prin originea sistemului de axe ortogonale, prin punctul $A(1, 0)$ și este tangent la cercul inițial.

23*. Să se determine valorile parametrului real a pentru care mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații $\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2+4}<1{,}5\\ 6x^4-48x^2+96\geq 0\end{cases}$ este $\mathbb{R}$.

24*. Pentru care valori ale parametrului real a orice soluție a inecuației $x^2-3x+2<0$ este și soluție a inecuației $ax^2-(3a+1)x+3<0$?

§ 3 Funcția radical. Funcția putere. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale

3.1. Funcția radical

Definiție. Se numesc **funcții radical** funcțiile $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$, și $g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=\sqrt[2n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Exemple

$f_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\sqrt[3]{x}$, și $f_2\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f_2(x)=\sqrt[4]{x}$, sînt funcții radical.

Proprietățile principale ale funcției radical

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2n+1]{x}$

1° $D(f)=\mathbb{R}$.

2° Funcția f are un unic zerou: $x_1=0$. Punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy este $O(0, 0)$.

3° $f(x)>0$ pentru $x\in(0,+\infty)$;
$f(x)<0$ pentru $x\in(-\infty, 0)$.

4° Funcția f este impară:
$f(-x)=\sqrt[2n+1]{-x}=\sqrt[2n+1]{-1}\cdot\sqrt[2n+1]{x}=-f(x)$.

$g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=\sqrt[2n]{x}$

1° $D(g)=\mathbb{R}_+$.

2° Funcția g are un unic zerou: $x_1=0$. Punctul de intersecție a graficului G_g cu axa Oy este $O(0, 0)$.

3° $g(x)>0$ pentru $x\in(0,+\infty)$;
funcția g nu are valori negative.

4° Funcția g nu este nici pară, nici impară, deoarece mulțimea $D(g)$ nu este simetrică față de $O(0, 0)$.

5° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (rezultă din proprietatea 7° a radicalilor).

6° Funcția f nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe un interval infinit.

7° Funcția f nu are extreme locale, fiindcă este strict monotonă pe un interval infinit.

8° Funcția f este bijectivă.

9° Funcția f este inversabilă. Inversa ei este $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = x^{2n+1}$.

5° Funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+$.

6° Funcția g nu este periodică.

7° Funcția g nu are extreme locale.

8° Funcția g este bijectivă.

9° Funcția g este inversabilă. Inversa ei este $g^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g^{-1}(x) = x^{2n}$.

10° Graficele funcțiilor radical f şi g sînt reprezentate în figura 7.5.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = \sqrt[2n+1]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$

$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\quad g(x) = \sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$

Fig. 7.5

3.2. Funcția putere cu exponent real

Definiție. Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, se numeşte **funcție putere cu exponent real**.

Proprietățile principale ale funcției putere

1° Domeniul de definiție al funcției f este $\mathbb{R}_+^*$, fiindcă puterea cu exponent real se examinează numai pentru o bază pozitivă.

2° Din proprietățile puterii se obține că funcția f este strict crescătoare dacă $\alpha > 0$, iar dacă $\alpha < 0$, atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.

3° Evident, funcția f nu este nici pară, nici impară.

4° Din cauza monotoniei pe $D(f)$, f nu este periodică, nu are extreme locale.

5° În funcție de valoarea exponentului, graficul funcției putere poate avea una din formele reprezentate în figura 7.6.

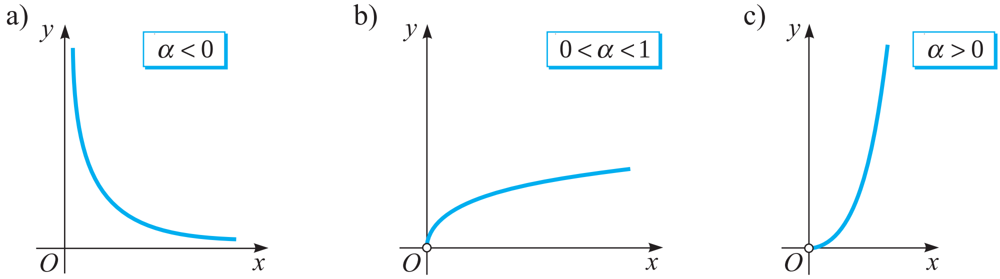


Fig. 7.6

Observație. Funcțiile determinate de formulele $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ şi $g(x)=\sqrt[n]{x}$, unde n este număr natural impar, sînt diferite, deoarece sînt diferite domeniile lor de definiție: $D(f)=\mathbb{R}_+^*$, iar $D(g)=\mathbb{R}$.

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{x-3}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$.

2. Să se traseze graficele funcțiilor:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[5]{x}$.

3. Să se studieze paritatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^4$; b) $f(x)=x^5$.

B

4. Să se determine suma şi produsul funcțiilor $f, g: D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^4,\ g(x)=x^5$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\sqrt[4]{x}$.

5. Să se determine domeniul de definiție şi mulțimea valorilor funcției $f: D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; b) $f(x)=\sqrt{1-x}$; c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4}}$.

6. Folosind definiția monotoniei, să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2+2$; b) $f(x)=(x+2)^2$; c) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+4$; d) $f(x)=(x+4)^{\frac{1}{3}}$.

7. Să se arate că funcția $f: D\to E$ este inversabilă şi să se determine inversa ei:
a) $f:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^4$; b) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{4x}$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}$.

8*. Să se determine suma, produsul şi compusa $f\circ g$ ale funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=x^3$; b) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt[3]{x}$.

3.3. Ecuații iraționale

Problemă. Un fermier are două loturi separate de pămînt de formă pătrată. Aria unuia este cu 32 de ari mai mică decît aria celuilalt. Să se afle aria fiecărui lot, dacă se ştie că pentru a le îngrădi complet fermierul a folosit un gard de 320 m lungime.

Rezolvare:

Fie x m^2 aria primului lot. Atunci $(x-3200)$ m^2 este aria lotului al doilea. Conform condiției problemei, obținem ecuația $4\sqrt{x}+4\sqrt{x-3200}=320$. Această ecuație este irațională.

Vom numi ***ecuație irațională*** o ecuație în care necunoscuta apare sub radical sau în baza puterii cu exponent rațional.

De exemplu, ecuațiile $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+1}=2,\ x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+3=0$ sînt ecuații iraționale.

Menționăm că la rezolvarea ecuațiilor iraționale, în urma efectuării unor transformări, pot să apară soluții străine. Apariția lor poate fi cauzată de faptul că, de exemplu, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*,\ f^{2k}(x)=g^{2k}(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

De aceea, pentru ecuația dată $f(x)=g(x)$ putem obține și soluții străine, anume soluțiile ecuației $f(x)=-g(x)$.

Așadar, în urma ridicării ambilor membri ai ecuației $f(x)=g(x)$ la o putere naturală pară putem obține soluții străine.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{4-x}=-x-2$.

Rezolvare:

Ridicînd la pătrat, obținem $4-x=x^2+4x+4\Leftrightarrow x^2+5x=0$. Deci, $x_1=-5,\ x_2=0$.

Prin verificare în ecuația inițială, ne convingem că –5 este o soluție, iar 0 nu este soluție a acestei ecuații, fiind soluție a ecuației $\sqrt{4-x}=x+2$.

Menționăm că dacă ambii membri ai ecuației $f(x)=g(x)$ iau valori de același semn pentru fiecare $x\in$ DVA, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ ecuațiile $f(x)=g(x)$ și $(f(x))^n=(g(x))^n$ sînt echivalente în DVA.

La rezolvarea ecuațiilor iraționale vom ține cont de

Teorema 3. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x)=(g(x))^{2n}, \\ g(x)\geq 0, \end{cases}$ iar ecuația $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$ este echivalentă cu ecuația $f(x)=(g(x))^{2n+1}$.

Exercițiu. Demonstrați teorema 3.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{1-x^2}=x+1$.

Rezolvare:

$$\sqrt{1-x^2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 1-x^2=(x+1)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\{-1,0\}$.

Menționăm că ecuațiile $f(x)=g(x)$ și $f(x)=-g(x)$ au același DVA. De aceea, rezolvînd o ecuație prin metoda ridicării ambilor membri la o putere naturală pară, este necesar de a verifica dacă soluțiile ecuației obținute aparțin DVA al ecuației inițiale.

Soluții străine pot apărea de asemenea în urma efectuării unor substituții.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ (5).

Rezolvare:

Ridicăm ambii membri ai ecuației (5) la cub și obținem ecuația
$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=-(x+1)$ (6), echivalentă cu cea inițială.

Ținînd cont de ecuația (5), înlocuim expresia din paranteze cu $\sqrt[3]{x-1}$ și obținem $\sqrt[3]{(x+1)(x-1)(3x+1)}=-(x+1)$ (7). Ridicăm la cub ambii membri ai ecuației (7) și obținem ecuația $(x+1)(3x+1)(x-1)+(x+1)^3=0,$ cu soluțiile $x_1=-1,\ x_2=0.$

Prin verificare în ecuația inițială, ne convingem că -1 este o soluție, iar 0 nu este soluție a acestei ecuații.

Răspuns: $S=\{-1\}$.

Ridicînd ambii membri ai ecuației (5) la cub, am obținut ecuația (6), echivalentă cu cea dată. Substituția expresiei $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ cu $\sqrt[3]{x-1}$ a condus însă la apariția unei soluții străine.

Observație. ***Verificarea soluțiilor*** este un lucru necesar la rezolvarea ecuațiilor iraționale, în afară de cazul în care toate ecuațiile obținute în procesul rezolvării sînt echivalente în DVA al ecuației inițiale.

O metodă generală de rezolvare a ecuațiilor iraționale constă în transformarea lor în ecuații (sisteme ce conțin atît ecuații, cît și inecuații) fără radicali, echivalente cu ecuația irațională dată. În urma aplicării acestei metode, verificarea nu este obligatorie.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x+3}=x.$

Rezolvare:

$$\sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Răspuns: $S=\{3\}$.

Uneori această metodă complică procesul de rezolvare, de aceea în astfel de cazuri se folosesc alte metode (se aplică teorema 3 sau metodele descrise mai jos).

Dacă determinarea DVA sau a condiției $g(x)\ge 0$ este mai dificilă decît însăși rezolvarea ecuației date, nu vom determina DVA și nu vom rezolva inecuația $g(x)\ge 0,$ ci doar vom verifica dacă soluțiile obținute verifică aceste condiții.

Uneori însă cu determinarea DVA se încheie rezolvarea ecuației date.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3, \\ x\le 2. \end{cases}$ Acest sistem de inecuații nu are soluții, deci ecuația inițială nu are soluții.

Răspuns: $S=\varnothing$.

Vom examina unele metode frecvent aplicate la rezolvarea ecuațiilor iraționale.

1 Metoda ridicării ambilor membri ai ecuației la aceeaşi putere naturală

Metoda aceasta se aplică, de regulă, la rezolvarea ecuațiilor de tipul

$$\sqrt[k]{f(x)}=g(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=h(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=\sqrt[k]{h(x)},\ k\in\mathbb{N},\ k\ge 2.$$

Deja am aplicat această metodă la rezolvarea ecuației $\sqrt{2x+3}=x$ (a se vedea pagina 124).

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$.

Rezolvare:

Aflăm DVA: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$

Separăm un radical şi prin ridicare la pătrat obținem $(\sqrt{x+1})^2=(8-\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+32=8\sqrt{3x+1}$. Ridicăm la pătrat ambii membri ai ultimei ecuații şi obținem ecuația $x^2-128x+960=0$, cu soluțiile $x_1=8$, $x_2=120$.

Efectuăm verificarea, deoarece transformările n-au fost echivalente. Valorile $x_1, x_2\in$ DVA. Deci, ambele valori pot fi soluții ale ecuației inițiale. Prin verificare în ecuația inițială, ne convingem că 8 este o soluție, iar 120 nu este soluție a ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{8\}$.

2 Rezolvarea ecuațiilor de tipul $f(x)\sqrt[2k]{g(x)}=0,\ k\in\mathbb{N}^*$

Această ecuație este echivalentă în DVA cu sistemul $\begin{cases} g(x)\ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right. \end{cases}$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0$.

Rezolvare:

$$(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ 4-x^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\{-2, 1, 2\}$.

3 Metoda utilizării necunoscutelor auxiliare

a) *Utilizarea unei necunoscute auxiliare*

Uneori, prin utilizarea unei necunoscute auxiliare, ecuațiile iraționale se reduc la ecuații fără radicali.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

Rezolvare:

DVA: $x^2+5x+1\geq 0$.

În DVA, $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2 \Leftrightarrow 3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0$.

Fie $\sqrt{x^2+5x+1}=t\geq 0$. Obținem ecuația $3t^2+2t-5=0$, cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{5}{3}$. Deoarece $t_2=-\frac{5}{3}<0$, rezolvăm numai ecuația $\sqrt{x^2+5x+1}=1$, care are soluțiile $x_1=0,\ x_2=-5$.

Cum transformările efectuate sînt echivalente, verificarea nu este necesară.

Răspuns: $S=\{-5,\ 0\}$.

b) *Utilizarea a două necunoscute auxiliare*

Pentru a rezolva unele ecuații iraționale, e mai convenabil de a utiliza două necunoscute auxiliare. Acest procedeu permite de a reduce ecuația irațională la un sistem de ecuații fără radicali.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases}77+x\geq 0\\ 20-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow\ x\in[-77,\ 20]$.

Fie $\begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=u,\\ \sqrt[4]{20-x}=v.\end{cases}$ (8). Atunci ecuația inițială se transformă în $u+v=5$.

Pentru a obține încă o ecuație cu necunoscutele u și v, ridicăm la puterea a patra membrii ecuațiilor sistemului (8). Obținem sistemul $\begin{cases}77+x=u^4,\\ 20-x=v^4,\end{cases}$ de unde $u^4+v^4=97$.

Astfel, am obținut sistemul de ecuații $\begin{cases}u+v=5,\\ u^4+v^4=97.\end{cases}$ Aplicînd transformările $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2$, obținem soluțiile $\begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}$ sau $\begin{cases}u=3,\\ v=2.\end{cases}$ (Verificați!)

Deci, pentru a determina soluțiile ecuației inițiale, vom rezolva totalitatea de sisteme:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=2,\\ \sqrt[4]{20-x}=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt[4]{77+x}=3,\\ \sqrt[4]{20-x}=2.\end{cases}$$

Primul sistem are soluția -61, iar sistemul al doilea – soluția 4.
Prin verificare, stabilim că ambele valori sînt soluții ale ecuației inițiale.

Răspuns: $S = \{-61, 4\}$.

Observație. Această metodă poate fi aplicată la rezolvarea ecuațiilor care conțin doi radicali.

4 Rezolvarea ecuațiilor de tipul $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x),\ k \in \mathbb{N}^*$

Această ecuație (conform teoremei 3) este echivalentă cu ecuația $f(x) = (g(x))^{2k+1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x - 12} = x$.

Rezolvare:

$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x - 12} = x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 12 = x^3 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$, de unde $x_1 = -4,\ x_2 = 3$.

Răspuns: $S = \{-4, 3\}$.

5 Metode speciale de rezolvare a ecuațiilor iraționale

a) ***Metoda înmulțirii ecuației cu conjugata expresiei ce reprezintă unul dintre membrii ecuației***

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$ (9).

Rezolvare:

Înmulțind ecuația (9) cu expresia $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$, obținem

$$x^2 - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6 = 3(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6} = -1. \qquad (10)$$

Adunînd ecuațiile (9) și (10), obținem $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1$. Astfel, $x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, de unde $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Substituind valorile 1, 2 în ecuația inițială, ne convingem că ambele sînt soluții ale acesteia.

Răspuns: $S = \{1, 2\}$.

Observație. Această metodă se aplică, de regulă, la rezolvarea ecuațiilor iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$.

b) ***Metoda completării pătratului (cubului etc.) sumei sau diferenței sub radical***

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$.

Rezolvare:

DVA: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$, deoarece $x + 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} + 1)^2$, $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2$.

Efectuînd transformări echivalente în DVA, obținem:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=x-1 \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=x-1.$$

Substituind $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0,$ în ecuația dată, obținem ecuația $t+1+|t-1|=t^2$.

Rezolvînd ultima ecuație prin metodele cunoscute (ținînd cont de substituția $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0,$ și de DVA), obținem că soluția ecuației inițiale este $x=5$.

Răspuns: $S=\{5\}$.

Observație. Deseori ecuația irațională poate fi rezolvată prin mai multe metode. Experiența vă va ajuta să alegeți metoda cea mai eficientă pentru ecuația dată.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x+1}=x-5$; b) $\sqrt{x-1}-x=-7$; c) $\sqrt{x+1}=2x+1$;

d) $\sqrt{x^2-3x+4}-x=2$; e) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; f) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(1-x^2)\sqrt{2x-5}=0$; b) $(3x^2-x-2)\sqrt{1-4x}=0$;

c) $(1-3x)\sqrt{x^2-2x+1}=0$; d) $(x^2-5x+6)\sqrt{2x^2-x-3}=0$.

3. Să se completeze cu un număr real, apoi să se rezolve ecuația obținută:

a) $\sqrt{1-2x}=\square\cdot x+1$; b) $\sqrt{\square\cdot x+2}=1-3x$; c) $\sqrt{0{,}5x-\square}=x+2$.

4. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției $\sqrt[3]{x^2}=1 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=1$.

B

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x}=x+1$; b) $\sqrt{x+3}=x-1$; c) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x$; d) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$;

e) corespunzătoare problemei de la începutul secvenței 3.3 și să se răspundă la întrebarea problemei.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$; b) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$;

c) $\sqrt[3]{x-5}=x+1$; d) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x^3-1)\sqrt{x^2-7x+12}=0$; b) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^2-64}=0$.

8. Utilizînd o necunoscută auxiliară, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$; b) $x-5\sqrt{x}+6=0$; c) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+1=0$;

d) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}=1$; e) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

9. Prin metoda înmulțirii cu conjugata unei expresii, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x^2-2x-4}+\sqrt{x^2+3x-1}=4$; b) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

10. Utilizînd două necunoscute auxiliare, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; b) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$; c) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

11*. Aplicînd o metodă cît mai eficientă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$; b) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$;
c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; d) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
e) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$; f) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

12*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\cdot\sqrt[n]{x^2-1}$; b) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$.

13. Să se compună o ecuație irațională care:
a) nu are soluții; b) are o unică soluție; c) are două soluții;
d) are mulțimea soluțiilor intervalul de tipul $[a, b]$;
e) are mulțimea soluțiilor intervalul de tipul $(a, +\infty)$ (sau $(-\infty, a)$).

14. Să se compună o ecuație irațională ale cărei soluții sînt numerele 4 şi –1.

15*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:
a) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\cdot\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}$; b) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

3.4. Inecuații iraționale

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x-3\sqrt{x}-4\le 0$.
Această inecuație este irațională.

Vom numi ***inecuație irațională*** o inecuație în care necunoscuta apare sub radical sau în baza puterii cu exponent rațional.

De exemplu, inecuațiile $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}-2\ge 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<1$ sînt inecuații iraționale.
Inecuațiile iraționale se rezolvă aplicînd procedee şi metode similare cu cele folosite la rezolvarea ecuațiilor iraționale.

Observație. În procesul rezolvării inecuațiilor iraționale vom efectua transformări echivalente, luînd în considerație următoarele afirmații:

I Dacă n este un număr natural impar, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ şi $(f(x))^n<(g(x))^n$ sînt echivalente.

II Dacă funcțiile f şi g sînt nenegative într-o mulțime M, iar n este un număr natural, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ şi $(f(x))^n<(g(x))^n$ sînt echivalente în mulțimea M.

III Dacă funcțiile f şi g sînt negative într-o mulțime M, iar n este un număr natural par, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ şi $(f(x))^n>(g(x))^n$ sînt echivalente în mulțimea M.

Expunem metodele principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații iraționale.

1 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} < g(x)$

În baza proprietăților radicalilor şi ale inecuațiilor,

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

2 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Aplicînd proprietățile radicalilor şi ale inecuațiilor, obținem:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Observație. Din sistemul al doilea a fost exclusă inecuația $f(x) \geq 0$, deoarece ea rezultă din inecuația a treia a acestui sistem.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{3x+1} > 2x$.

Rezolvare:

$$\sqrt{3x+1} > 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x < 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 3x+1 > 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \\ x \in [0, 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right).$$

Răspuns: $S = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$.

3 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

În baza proprietăților radicalilor şi ale inecuațiilor, $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{3}x$.

Rezolvare:

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{3}x \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x^2 \leq 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Răspuns: $S = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Observație. În unele cazuri este mai eficient să folosim totalitatea mixtă $\left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}=g(x),\\ \sqrt{f(x)}<g(x),\end{array}\right.$ echivalentă cu inecuația inițială.

4 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$

În baza proprietăților radicalilor și ale inecuațiilor,

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0\\ g(x)<0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)\ge g^2(x)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases} g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge g^2(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Observație. Uneori este mai eficient să utilizăm totalitatea mixtă $\left[\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}=g(x),\\ \sqrt{f(x)}>g(x),\end{array}\right.$ echivalentă cu inecuația inițială.

La rezolvarea inecuațiilor iraționale vom aplica aceleași metode ca și la rezolvarea ecuațiilor iraționale: ridicarea inecuației la o putere naturală, utilizarea necunoscutelor auxiliare, completarea pătratului (cubului) sumei sau diferenței sub semnul radicalului etc.

Exemple

1 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}\ge 1$.

Rezolvare:

DVA: $x\in[2, +\infty)$. Inecuația inițială este echivalentă cu inecuația $\sqrt{2x+1}\ge 1+\sqrt{x-2}$. Ambii membri ai acestei inecuații sînt nenegativi în DVA, deci ridicăm la pătrat și obținem inecuația echivalentă $2\sqrt{x-2}\le x+2$.

$$2\sqrt{x-2}\le x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0\\ x+2\ge 0\\ 4(x-2)\le (x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2\\ x^2+12\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[2, +\infty).$$

Luînd în considerație DVA, obținem soluțiile $x\in[2, +\infty)$ ale inecuației inițiale.

Răspuns: $S=[2, +\infty)$.

2 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}>-1$.

Rezolvare:

DVA: $x\in[2, +\infty)$. Fie $\sqrt{x-2}=t,\ t\ge 0$, atunci $x=t^2+2$. Obținem:

$$\sqrt{t^2-4t+4}-\sqrt{t^2-6t+9}>-1 \Leftrightarrow |t-2|-|t-3|>-1.$$

Inecuația $|t-2|-|t-3|>-1$ este echivalentă cu totalitatea sistemelor

$$\begin{cases} t<2,\\ -(t-2)+(t-3)>-1;\end{cases}\quad \begin{cases} 2\le t<3,\\ (t-2)+(t-3)>-1;\end{cases}\quad \begin{cases} t\ge 3,\\ (t-2)-(t-3)>-1.\end{cases}$$

Primul sistem nu are soluții. Sistemul al doilea are soluțiile $t \in (2, 3)$, iar sistemul al treilea are soluțiile $t \in [3, +\infty)$.

Revenind la necunoscuta x și la DVA, obținem sistemul $\begin{cases} \sqrt{x-2} > 2, \\ x \geq 2. \end{cases}$

Soluțiile acestui sistem, deci și ale inecuației inițiale, sînt $x \in (6, +\infty)$.

Răspuns: $S = (6, +\infty)$.

Exerciții și probleme propuse

B

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

1. a) $\sqrt{2x+3} > 1$; b) $\sqrt{1-x} \leq 2$; c) $\sqrt{x^2-3x} \leq -3$;
d) $\sqrt{x^2-3x+2} \geq -5$; e) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{1-2x}} \leq 1$; f) $\sqrt[3]{x+2} > -2$.

2. a) $\sqrt{2x+10} > 3x-5$; b) $\sqrt{x^2-4x} < x-3$; c) $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4$;
d) $\sqrt{(x-4)(x+1)} \leq 3(x+1)$; e) $\sqrt[3]{x^3-2x} \geq x$; f) $\sqrt[3]{1+x^3} \leq 2+x$.

3. a) $\dfrac{3x^2-5x+8}{\sqrt{x^2-9}} \geq 0$; b) $\dfrac{(x-1)\sqrt{x-8}}{x^2-16} \geq 0$; c) $(x^2-3x)\sqrt[3]{1-x} \leq 0$.

4. a) $\sqrt{x+3} \leq 2+\sqrt{x-4}$; b) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{3x}} > 2$;
c) $(x-4)\sqrt{x^2-3} \leq x^2-16$; d) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2} \leq \sqrt{2x+4}$.

5. a) $\dfrac{\sqrt{5-20x-x^2}}{x} \geq 1$; b) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2-x} < 2$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}} < \dfrac{1}{1-x}$.

6. a) $\sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt{4x^2-4x+1} \leq 2$; b) $2+x-3\sqrt{x^2-6x+9} > x^2$;
c) $|t-1| + \sqrt{9t^2+6t+1} \leq 2t$; d) $|1-\sqrt[3]{x-2}| - |\sqrt[3]{x+1}-3| \leq 2$.

7. a) $x^2+\sqrt{x^2+11} > 31$; b) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+1}} - \sqrt{\dfrac{2x+1}{1-x}} \geq \dfrac{7}{12}$; c) $\sqrt{x^2-3x+5} \geq 3x+7-x^2$.

8*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a \in \mathbb{R}$, inecuația:
a) $x+4a > 5\sqrt{ax}$; b) $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$; c) $\sqrt{1-x^2} \geq 2x+a$.

9. Să se completeze cu un număr real, apoi să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația obținută:
a) $\sqrt{\boxed{} \cdot x+4} \geq x$; b) $\sqrt{x^2-3x-4} < \boxed{} \cdot x+1$; c) $\sqrt{3x^2-x-2} > \sqrt{3} \cdot x + \boxed{}$.

10. Să se rezolve inecuația propusă la începutul secvenței 3.4.

11. Să se compună o inecuație irațională care în $\mathbb{R}$:
a) are o unică soluție; b) are două soluții;
c) nu are nici o soluție; d) are ca mulțime a soluțiilor un interval de tipul (a, b).

3.5. Sisteme, totalități de ecuații iraționale

La rezolvarea sistemelor (totalităților) de ecuații iraționale vom aplica atît metode generale de rezolvare a sistemelor algebrice (metoda substituției, metoda reducerii, metoda utilizării necunoscutelor auxiliare etc.), cît şi metode specifice de rezolvare a ecuațiilor iraționale.

Să analizăm cîteva exemple de sisteme şi totalități de ecuații iraționale.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y+7}=3,\\ x-y=1.\end{cases}$

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases}x-1\geq 0,\\ y+7\geq 0.\end{cases}$ Substituim $x = 1 + y$ în prima ecuație şi obținem ecuația iraţională $\sqrt{y}+\sqrt{y+7}=3$, cu soluția $y=\frac{1}{9}$. (Verificați!) Atunci $x=\frac{10}{9}$.

Verificare. Perechea $\left(\frac{10}{9},\frac{1}{9}\right)$ aparține DVA. Substituind aceste valori în sistemul inițial, ne convingem că perechea $\left(\frac{10}{9},\frac{1}{9}\right)$ este o soluție a sistemului dat.

Răspuns: $S=\left\{\left(\frac{10}{9},\frac{1}{9}\right)\right\}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}\sqrt[4]{x-y}-\sqrt[4]{x+y}=10,\\ \sqrt{x^2-y^2}=121.\end{cases}$

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases}x-y\geq 0,\\ x+y\geq 0,\\ x^2-y^2\geq 0.\end{cases}$ Observăm că în DVA $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}$ şi aplicăm metoda utilizării necunoscutelor auxiliare.

Fie $\begin{cases}\sqrt[4]{x-y}=u,\\ \sqrt[4]{x+y}=v,\end{cases}$ $u\geq 0,\ v\geq 0.$ Obținem: $\begin{cases}u-v=10\\ (u\cdot v)^2=121\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u-v=10,\\ uv=11;\end{cases}\\ \begin{cases}u-v=10,\\ uv=-11.\end{cases}\end{array}\right.$

Luînd în considerație că $u\geq 0,\ v\geq 0,$ obținem $u = 11$, $v = 1$.

Deci, rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea sistemului de ecuații iraționale simple: $\begin{cases}\sqrt[4]{x-y}=11\\ \sqrt[4]{x+y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=14641\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7321,\\ y=-7320.\end{cases}$

Cum toate transformările sînt echivalente, verificarea este de prisos.

Răspuns: $S = \{(7\,321, -7\,320)\}$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2\cdot\sqrt{2x^2-1}-2x=x^2-2x\sqrt{2x^2-1}$.

Rezolvare:

DVA: $2x^2-1\geq 0$. Aplicăm metoda descompunerii în factori şi scriem ecuația inițială sub forma $(\sqrt{2x^2-1}-1)(x^2+2x)=0$. Rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea, în DVA, a totalității $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-1}-1=0,\\ x^2+2x=0.\end{array}\right.$

Prima ecuație are soluțiile $x_1=-1, x_2=1$, iar ecuația a doua are soluțiile $x_3=0$, $x_4=-2$. Luînd în considerație DVA, constatăm că numai valorile -1, 1, –2 sînt soluții ale ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{-2,-1,1\}$.

Exerciții şi probleme propuse

B

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\\ x-2y=-1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}=\sqrt{x+y}+1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1=0,\\ 2x+y=5;\end{cases}$ e) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ xy=27;\end{cases}$ f) $\begin{cases}4(\sqrt{x}+\sqrt{y})-6\sqrt{xy}=0,\\ x+y=5.\end{cases}$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=14,\\ x^2+y^2+xy=84;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6,\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de ecuații:

a) $\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2,\\ \sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x};\end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{x^2-16}=18,\\ (x^2-9)\sqrt{x+1}=0.\end{array}\right.$

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}-2\sqrt{x+1}=3\sqrt{x}$; b) $(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-16x+2}-x+1)=0$.

5. Să se compună un sistem de ecuații iraționale care:
a) are o unică soluție; b) are două soluții; c) nu are nici o soluție; d) are o infinitate de soluții.

6. Să se compună un sistem de ecuații iraționale a cărui soluție să fie perechea de numere (–2, 0).

7. Să se compună o ecuație irațională a cărei rezolvare să se reducă la rezolvarea unei totalități de ecuații iraționale.

8*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4a,\\ x-y=8a^2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=a+\sqrt{y},\\ x^2+2x-y^2-4y-3=0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ x+\sqrt{xy}+y=a.\end{cases}$

3.6. Sisteme, totalități de inecuații iraționale cu o necunoscută

Ideea principală la rezolvarea sistemelor şi totalităților de inecuații iraționale constă în reducerea la rezolvarea sistemelor (totalităților) de inecuații fără radicali.

Sisteme de inecuații iraționale

Să examinăm cîteva exemple de rezolvare a sistemelor de inecuații iraționale.

Exemple

1 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases}\sqrt{x+1}>1,\\ \sqrt{3x-2}<x.\end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este echivalent cu următorul sistem de inecuații algebrice:

$$\begin{cases}x+1>1\\ x>0\\ 3x-2\geq 0\\ 3x-2<x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{2}{3},\\ x^2-3x+2>0.\end{cases}$$

(Verificați!)

Rezolvînd ultimul sistem, obținem soluțiile $x\in\left[\frac{2}{3},1\right)\cup(2,+\infty)$, care sînt şi soluțiile sistemului inițial.

Răspuns: $S=\left[\frac{2}{3},1\right)\cup(2,+\infty)$.

2 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases}x^2-4+2\sqrt{x^2-1}\leq 0,\\ (3x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}\geq 0.\end{cases}$

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases}x^2-1\geq 0,\\ \dfrac{x-1}{2-x}\geq 0.\end{cases}$ Rezolvînd acest sistem, obținem DVA al sistemului inițial: $x\in[1,2)$.

Totalități de inecuații iraționale

Să examinăm cîteva exemple de rezolvare a totalităților de inecuații iraționale.

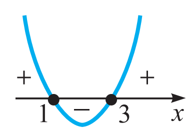
Exemple

1 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de inecuații $\left[\begin{array}{l}x-4\sqrt{x}+3\leq 0,\\ \sqrt{3x+1}\geq x+1.\end{array}\right.$

Rezolvare:

Rezolvăm prima inecuație.
DVA: $x\in[0,+\infty)$.

Notăm $\sqrt{x}=t$, $t\geq 0$, şi obținem inecuația algebrică $t^2-4t+3\leq 0$, cu soluțiile $t\in[1,3]$, sau $1\leq t\leq 3$.



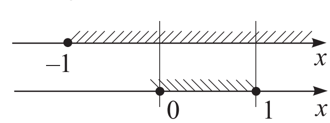
Revenind la necunoscuta x, obținem $1\leq\sqrt{x}\leq 3\Leftrightarrow 1\leq x\leq 9$. Luînd în considerație DVA al primei inecuații, obținem soluțiile $x\in[1,9]$ (13).

Inecuația a doua este echivalentă cu totalitatea de sisteme de inecuații algebrice:

$$\begin{cases}x+1<0,\\ 3x+1\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x+1\geq 0,\\ 3x+1\geq (x+1)^2.\end{cases}$$

Primul sistem nu are soluții. (Verificați!)
Rezolvăm sistemul al doilea:

$$\begin{cases}x+1\geq 0\\ x^2-x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,1] \quad (14).$$



Reuniunea mulțimilor soluțiilor inecuațiilor totalității inițiale, adică reuniunea

Rezolvăm în DVA prima inecuație a sistemului inițial.

Notăm $\sqrt{x^2-1}=t,\ t\geq 0.$ Obținem inecuația $t^2+2t-3\leq 0,$ cu soluțiile $t\in[-3,1].$ Cum $t\geq 0,$ obținem soluțiile $t\in[0,1],$ de unde $0\leq\sqrt{x^2-1}\leq 1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1\geq 0,\\ x^2-1\leq 1.\end{cases}$ Acest sistem are soluțiile $x\in[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}].$

Luînd în considerație DVA, obținem soluțiile primei inecuații a sistemului: $x\in[1,\sqrt{2}]$ (11).

Inecuația a doua este echivalentă în DVA cu totalitatea $\left[\begin{array}{l}(3x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=0,\\ (3x+1)\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}>0.\end{array}\right.$

Ecuația totalității are soluția $x=1$, iar $x\in(1,2)$ sînt soluțiile inecuației.

Totalitatea are soluțiile $x\in[1,2)$ (12).

Din (11) și (12) rezultă că soluțiile sistemului inițial sînt $x\in[1,\sqrt{2}).$

Răspuns: $S=[1,\sqrt{2}).$

mulțimilor (13) și (14), este mulțimea soluțiilor totalității: $[0,9].$

Răspuns: $S=[0,9].$

2 Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de inecuații $\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}\geq 0,\\ \sqrt{9x^2-18x+9}<x+3.\end{array}\right.$

Rezolvare:

Rezolvăm prima inecuație:

$$\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3=0\\ x-1\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3>0\\ x-1>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup(1,+\infty)$ (15).

Rezolvăm inecuația a doua:

$\sqrt{9x^2-18x+9}<x+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x-1|<x+3\Leftrightarrow x\in(0,3)$ (16).

Din (15) și (16) rezultă că soluțiile totalității inițiale sînt $x\in\{-3\}\cup(0,+\infty).$

Răspuns: $S=\{-3\}\cup(0,+\infty).$

Observație. Procedăm similar și în cazul rezolvării totalității de sisteme de inecuații iraționale.

Exerciții și probleme propuse

B

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

1. a) $\begin{cases}\sqrt{x^2-6x+2}>3,\\ \sqrt{x-3}\geq 0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<2,\\ \dfrac{x-1}{3x+2}\geq 0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\sqrt{x-3}>-5,\\ \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}\leq 1;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{3+x}{\sqrt{x-2}}\leq 0,\\ x-11\sqrt{x}+12\geq 0.\end{cases}$

2. a) $\begin{cases}\sqrt{4x^2-4x+1}-(x^2-2x-3)\leq 2,\\ \sqrt{x-1}\leq x;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+1)\sqrt{x^2-4}\geq 0,\\ \sqrt[3]{2x^2-x}-\sqrt[3]{1-x}<0.\end{cases}$

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de inecuații:

a) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+2x+8}{\sqrt{3-x}}\geq 0,\\ \sqrt{x+1}\leq x;\end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l}2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}<1,\\ 3x^2-\sqrt{x^2+x}\geq -3x;\end{array}\right.$ c) $\left[\begin{array}{l}3x\sqrt{x+1}>0,\\ \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x+1}}\leq 1.\end{array}\right.$

4. Să se compună:

a) un sistem de inecuații iraționale cu o necunoscută, care are mulțimea soluțiilor intervalul $(-1, 2)$;

b) o totalitate de inecuații iraționale cu o necunoscută, care are mulțimea soluțiilor intervalul $(-1, 2)$.

5. Să se compună un sistem de inecuații iraționale care:

a) are o unică soluție;

b) are două soluții;

c) are mulțimea soluțiilor un interval de tipul $[a, b]$;

d) nu are soluții.

Proba de evaluare I

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - x + 3$.

a) Aflați zerourile funcției f. **1**

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) \geq 0$. **1**

c) Determinați, în mod analitic, coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor, dacă $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. **2**

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left|7\frac{1}{4} - 3{,}2x\right| \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 0$. **3**

3. Doi meșteri au executat împreună o comandă în 12 ore. Dacă mai întîi primul meșter singur ar fi executat o jumătate din comandă, iar apoi al doilea meșter singur ar fi executat cealaltă jumătate, atunci comanda ar fi fost realizată în 25 de ore. În cîte ore fiecare dintre meșteri ar executa această comandă lucrînd singur? **3**

B

1. Fie inecuația $\sqrt{5-2x} + 1 \leq \frac{6}{\sqrt{5-2x}}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația. **2**

b) Determinați soluțiile întregi ale inecuației. **1**

c) Scrieți o funcție f de gradul II ale cărei zerouri sînt soluțiile întregi ale inecuației. **1**

d) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f. **1**

2. Fie polinomul $P(X) = X^2 - (a-3)X + a$.

a) Pentru care valori reale ale lui a polinomul $P(X)$ are cel puțin o rădăcină? **2**

b) Aflați suma pătratelor rădăcinilor polinomului $P(X)$. **1**

c) Determinați valoarea minimă a sumei pătratelor rădăcinilor polinomului $P(X)$. **1**

d) Pentru care valori ale lui a polinomului $P(X)$ are două rădăcini pozitive? **1**

§ 4 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale. Inecuații exponențiale

4.1. Funcția exponențială

În timpul reacției nucleare în lanț, în locul fiecărui neutron liber, peste l secunde apar alți ν neutroni liberi. Mărimile l şi ν depind de substanța şi mediul în care are loc reacția. S-a determinat că numărul K de neutroni liberi în momentul de timp t se estimează prin formula $K = K_0 \cdot e^{(\nu-1)t/l}$, unde K_0 este numărul de neutroni liberi în momentul $t_0 = 0$, e – o constantă. Funcția de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = e^{\mu t}$, care apare în aceste calcule, este o funcție exponențială.

Definiție. Se numeşte **funcție exponențială** funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.

De exemplu, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, sînt funcții exponențiale.

Observație. Cazul $a = 1$ se exclude din examinare, deoarece obținem funcția constantă $f(x) = 1$, ale cărei proprietăți sînt diferite de proprietățile funcției exponențiale.

Proprietățile principale ale funcției exponențiale

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° $E(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Într-adevăr, din proprietățile puterii cu exponent real se ştie că $a^x > 0$ pentru orice x real, deci $E(f) \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Poate fi demonstrată şi incluziunea inversă.

3° Din proprietatea 2° rezultă că funcția exponențială nu are zerouri. Graficul ei intersectează axa Oy în punctul (0, 1), fiindcă $a^0 = 1$ pentru orice $a > 0$.

4° În virtutea proprietăților de comparare a puterilor cu aceeaşi bază şi cu orice exponent real (modulul 3, § 2), rezultă că funcția exponențială este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, dacă $a > 1$, şi strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, dacă $0 < a < 1$.

Observație. În baza monotoniei, se obțin următoarele echivalențe:

$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ a > 1),$$
$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1),$$
$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1),$$

care se folosesc la rezolvarea ecuațiilor şi inecuațiilor exponențiale.

5° Funcția exponențială ia valori pozitive pe $\mathbb{R}$.

6° Funcția exponențială nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ și există x_0, astfel încît $f(-x_0)\neq \pm f(x_0)$.

7° Funcția exponențială nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

8° Funcția exponențială nu are extreme locale, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

9° Funcția exponențială este surjectivă (proprietatea 2°) și injectivă (proprietatea 4°, observație), deci bijectivă și inversabilă.

10° Graficul funcției exponențiale $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, este reprezentat în figura 7.7.

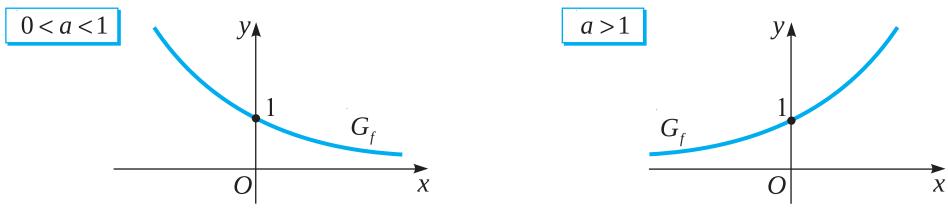


Fig. 7.7

Exercițiu. În figura 7.8 sînt reprezentate grafic funcțiile $f_1, f_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Utilizînd aceste grafice, determinați proprietățile funcțiilor f_1 și f_2.

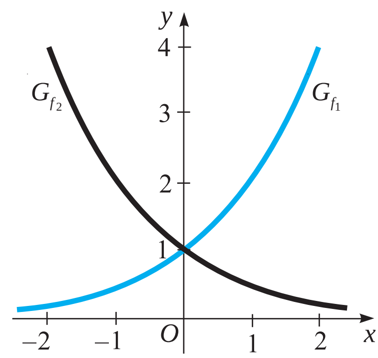


Fig. 7.8

Exerciții rezolvate

1. Să se compare numerele $5^{\sqrt{3}}$ și $5^{\sqrt{2,5}}$.

Rezolvare:

Cum funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=5^x$, este strict crescătoare, iar $\sqrt{3}>\sqrt{2,5}$, rezultă că $5^{\sqrt{3}}>5^{\sqrt{2,5}}$.

2. Să se compare cu 1: a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$.

Rezolvare:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$ este valoarea funcției exponențiale $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, în punctul $x_0=\sqrt{5}>0$. Cum baza acestei funcții este mai mică decît 1, rezultă că $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}<1$.

b) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$ este valoarea funcției exponențiale $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=(\sqrt{2}-1)^x$, în punctul $x_0=-\frac{3}{2}<0$.

Cum baza acestei funcții este mai mică decît 1, obținem că $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}>1$.

4.2. Ecuații exponențiale

Problemă. La 3 ianuarie 2012, un elev a depus la bancă 1 leu. Peste cîți ani acest elev va deveni milionar, dacă dobînda anuală compusă este de 10%?

Rezolvare:

Peste 1 an, elevul va avea pe cont $1+0{,}1=1{,}1$ (lei), peste 2 ani, $1{,}1+0{,}11=1{,}21=1{,}1^2$ (lei) ş.a.m.d. Fie x numărul respectiv de ani. Obținem ecuația $1{,}1^x=1\,000\,000$.

Această ecuație este o ecuație exponențială.

Vom numi ***ecuație exponențială*** o ecuație în care exponentul puterii este o expresie ce conține necunoscuta, baza puterii fiind o constantă pozitivă, diferită de 1.

De exemplu, ecuațiile $2^x=8$, $5\cdot 3^{2x-1}=5^{2x}$, $4^{2x}-4^x=20$ sînt ecuații exponențiale.

La rezolvarea ecuațiilor exponențiale vom ține cont de

Teorema 4. Dacă $a>0$ şi $a\neq 1$, atunci ecuațiile $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ şi $f(x)=g(x)$ sînt echivalente.

Exercițiu. Demonstrați teorema 4.

Vom examina metodele principale de rezolvare a unor tipuri de ecuații exponențiale.

1 Ecuații exponențiale de tipul $a^{f(x)}=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ a, b\in\mathbb{R}$

1) Fie $f(x)=x$. Ecuația $a^x=b$ se numeşte ***ecuație exponențială fundamentală***. Sînt posibile următoarele cazuri particulare.

a) $b\leq 0$. Ecuația $a^x=b$ nu are soluții (a se vedea graficul funcției exponențiale – figura 7.7).

b) $b>0$ şi $b=a^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$. Atunci $a^x=b \Leftrightarrow a^x=a^\alpha \Leftrightarrow x=\alpha$.

Exemplu. $5^x=25 \Leftrightarrow 5^x=5^2 \Leftrightarrow x=2$. *Răspuns*: $S=\{2\}$.

c) $b>0$ şi b nu este exprimat ca putere a lui a. În acest caz, folosim identitatea logaritmică fundamentală $b=a^{\log_a b}$. Aplicînd teorema 4, obținem:

$$a^x=b \Leftrightarrow a^x=a^{\log_a b} \Leftrightarrow x=\log_a b.$$

Exemplu. $3^x=12 \Leftrightarrow 3^x=3^{\log_3 12} \Leftrightarrow x=\log_3 12$. *Răspuns*: $S=\{\log_3 12\}$.

2) Similar se procedează la rezolvarea ecuației exponențiale de tipul $a^{f(x)}=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $a, b\in\mathbb{R}$.

2 Ecuațiile exponențiale de tipul $a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1,\ a\in\mathbb{R}$, sînt echivalente (conform teoremei 4) cu ecuația $f(x)=g(x)$.

Exemplu. $0{,}2^{x^3-1}=0{,}2^{x^2-1} \Leftrightarrow x^3-1=x^2-1 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0$.

Răspuns: $S=\{0, 1\}$.

3 **Ecuații exponențiale rezolvabile prin metoda descompunerii în factori**

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $12^x+6^x-4^x-2^x=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$.

Grupînd termenii, obținem: $12^x+6^x-4^x-2^x=0 \Leftrightarrow (12^x+6^x)-(4^x+2^x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2^x\cdot 6^x+6^x)-(2^{2x}+2^x)=0 \Leftrightarrow 6^x(2^x+1)-2^x(2^x+1)=0 \Leftrightarrow (2^x+1)(6^x-2^x)=0.$
Deci, $6^x-2^x=0$ sau $2^x+1=0$, de unde $6^x=2^x$ sau $2^x=-1$.

Soluția ecuației $6^x=2^x$ este $x=0$, iar ecuația a doua nu are soluții.

Răspuns: $S=\{0\}$.

4 **Ecuațiile exponențiale de tipul $f(a^x)=0$** se rezolvă prin ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare*** $a^x=t$, care reduce ecuația inițială la ecuația de tipul $f(t)=0$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $9^x-2\cdot 3^x=3$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. $9^x-2\cdot 3^x=3 \Leftrightarrow (3^x)^2-2\cdot 3^x-3=0$. Fie $3^x=t,\ t>0$. Obținem ecuația $t^2-2t-3=0$, cu soluțiile $t_1=3,\ t_2=-1$. Dintre aceste valori, numai $t_1=3>0$. Rezolvăm ecuația $3^x=3$ și obținem $x=1$.

Răspuns: $S=\{1\}$.

Unele ecuații exponențiale, în care apar puteri cu aceeaşi exponenți, dar cu baze diferite, pot fi rezolvate prin metoda utilizării necunoscutei auxiliare după împărțirea fiecărui membru al ecuației la una din aceste puteri.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Împărțind ambii membri ai ecuației inițiale la 8^x, obținem ecuația $1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=0$. Efectuînd substituția $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=t,\ t>0$, obținem:
$2t^3-t^2-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+t+1)=0 \Leftrightarrow t=1$. Atunci $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Răspuns: $S=\{0\}$.

5 **Ecuații exponențiale rezolvabile prin metoda logaritmării**

Exemple

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^{2x-1}=3^x$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Logaritmînd în baza 10, obținem ecuația $(2x-1)\lg 4=x\lg 3$, echivalentă cu cea inițială. Soluția ecuației este $x=\frac{\lg 4}{\lg 16-\lg 3}$. *Răspuns*: $S=\left\{\frac{\lg 4}{\lg 16-\lg 3}\right\}$.

② Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{6^x} = 4^{5^x}$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Logaritmînd în baza 10, obținem ecuația $6^x \lg 3 = 5^x \lg 4$.

Logaritmînd din nou, obținem $x\lg 6 + \lg\lg 3 = x\lg 5 + \lg\lg 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg\lg 4 - \lg\lg 3}{\lg 6 - \lg 5}$.

Răspuns: $S = \left\{\dfrac{\lg\lg 4 - \lg\lg 3}{\lg 6 - \lg 5}\right\}$.

6 Unele ecuații exponențiale pot fi rezolvate aplicînd proprietățile funcțiilor determinate de membrii respectivi ai ecuației.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x = -4x + 1$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Prin probe, găsim soluția $x = 0$. Cum funcția f, definită prin formula $f(x) = 5^x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar funcția g, definită prin formula $g(x) = -4x + 1$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă că graficele acestor funcții au un unic punct de intersecție. Prin urmare, ecuația are doar soluția $x = 0$.

Răspuns: $S = \{0\}$.

7 **Ecuații de tipul $a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = a^p \cdot b^q$**

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x \cdot 2^{\frac{x+2}{x}} = 40$.

Rezolvare:

$$5^x \cdot 2^{\frac{x+2}{x}} = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \cdot 2^{\frac{x+2}{x}} = 5 \cdot 2^3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-1} = 2^{3-\frac{x+2}{x}} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \dfrac{2(x-1)}{x}\log_5 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \log_5 4. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \{1, \log_5 4\}$.

În caz general,

$$a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = a^p \cdot b^q \Leftrightarrow a^{f(x)-p} = b^{q-g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \cap D_g, \\ f(x) - p = [q - g(x)]\log_a b. \end{cases}$$

8 Există ecuații în care **necunoscuta apare atît în baza puterii, cît și la exponentul ei**, adică ecuații de tipul $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Ecuația de tipul $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$, $h(x) > 0$, este echivalentă cu totalitatea de sisteme $\begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x); \end{cases}$ $\begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$

Exemplu

Ecuația $(x+1)^{x^2-2} = (x+1)^x$ este echivalentă cu totalitatea $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ x^2 - 2 = x; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 = 1, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Răspuns: $S = \{0, 2\}$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 4^x$; b) $f(x) = 1{,}5^x$; c) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$; d) $f(x) = 4^{-x}$.

2. Să se decidă dacă $a \in (0, 1)$ sau $a > 1$, știind că:

a) $a^{\sqrt{2}} > a$; b) $a^{-0{,}5} < -a^{-\sqrt{2}}$; c) $a^{2{,}7} < a^{\sqrt{7}}$.

3. Să se compare numerele: a) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ și $(\sqrt{2})^{1{,}3}$; b) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}$ și $(0{,}3)^{-1{,}8}$.

4. Să se determine valorile lui x pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ia valori mai mici decît 1, dacă:

a) $f(x) = (5\sqrt{5})^x$; b) $f(x) = (0{,}5)^x$; c) $f(x) = 3^{-x}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

5. a) $1{,}1^x = 1000\,000$; b) $4^x = 64$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; d) $(0{,}2)^{-x} = \frac{1}{25}$;

e) $7^x = \sqrt[3]{49}$; f) $3^{2x+2} = -81$; g) $11^{x+1} = 121$; h) $0{,}2^{x^2+x} = 0$.

6. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^4$; b) $12^{x+1} = 15$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^{x-1} = \frac{125}{64}$.

7. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-1}$; b) $(0{,}5)^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; c) $\sqrt[3]{4^{x+1}} \cdot 16 = \sqrt{4^{x^2}}$.

8. a) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-2} = 77$; b) $4^{x+3} - 4 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^{x+1} = 4^{x-1}$; c) $3^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+4} = 3^{x+6} - 5^{x+3}$.

9. a) $9^x + 3^x = 272$; b) $16^x - 4 \cdot 4^x + 3 = 0$; c) $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$.

B

10. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3^{|x|}$; b) $f(x) = |3^x|$; c) $f(x) = 2^{|x|+1}$.

11. Să se selecteze numerele mai mari decît 1: $(\sqrt{2})^{-\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3})^{0{,}1}$, $(2-\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$.

12. Să se compare: a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{5}}$ cu $\frac{9}{49}$; b) 3^{-4} cu 2^{-3}.

13. Pentru care valori ale lui x funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{2})^x$, $g(x) = (0{,}25)^{x-2}$, iau valori egale?

14. Pentru care valori ale lui x funcția $f: D \to \mathbb{R}$ ia valori mai mari decît 1, dacă:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; b) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

15. a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{25}{64}\right)^{x^2} = \frac{625}{65536}$; b) $(0{,}6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

16. a) $5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 35 \cdot 5^{2x} + 7^x$; b) $4^x - 3^{x+1{,}5} + 2^{2x-1} = 3^{x+0{,}5}$.

17. a) $81^{x^2-1} - 36 \cdot 9^{x^2-3} + 3 = 0$; b) $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$.

18. a) $(2+\sqrt{3})^{2x+1} + (2-\sqrt{3})^{2x+1} = 4$; b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2} - \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2} = 10$.

19. a) $4^x + 10^x - 2 \cdot 25^x = 0$; b) $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$; c) $3 \cdot \sqrt[x]{4} - 4 \cdot \sqrt[x]{10} + \sqrt[x]{25} = 0$.

20. a) $4^{|x-3|}+4^{|x+1|}=4^x$; b) $|5^x-1|+|5^x-5|=2$; c) $|x-1|^{x^2-2x}=1$.

21. a) $3^x+4^x=5^x$; b) $2^x-3^{\frac{x}{2}}=7$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x=-3x^2+2x-1$.

22. a) $|x-3|^{x^2-3x}=(x-3)^4$; b) $(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2-x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2-x}}=(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2\cdot x}}$.

23. a) $6^{(x+3)\log_6 2}\cdot 2^{x^2-2x}=32$; b) $7^{(x-2)\log_7 3}\cdot 3^{x^2+3x}=27$; c) $3^x\cdot 7^{\frac{x+3}{x}}=1323$.

24. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:
a) $625^{|x+1|}-2\cdot 25^{|x+1|}+a=0$; b) $3\cdot 4^{x-2}+27-a=a\cdot 4^{x-2}$; c) $a\cdot 2^x+2^{-x}=5$.

25. Să se compună o ecuație exponențială cu soluția –3.

26. Să se compună o ecuație exponențială care:
a) nu are soluții; b) are o unică soluție; c) are două soluții.

4.3. Inecuații exponențiale

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2^{2x+2}<6^x+2\cdot 3^{2x+2}$.

Această inecuație este o inecuație exponențială.

Vom numi ***inecuație exponențială*** o inecuație în care exponentul puterii este o expresie ce conține necunoscuta, baza puterii fiind o constantă pozitivă, diferită de 1.

De exemplu, inecuațiile $3^x<9$, $9^x-2\cdot 3^x-8\le 0$ sînt inecuații exponențiale.

Vom examina metodele principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații exponențiale.

1 Inecuații exponențiale de tipul $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$

Rezolvarea acestui tip de inecuații exponențiale se bazează pe

Teorema 5. Dacă $a>1$, atunci inecuația $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x)<g(x)$.
Dacă $0<a<1$, atunci inecuația $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x)>g(x)$.

Demonstrația acestei teoreme are la bază proprietatea 4° (secvența 4.1) a funcției exponențiale $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

Exemple

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2^{3x-1}<4$.

Rezolvare:

$2^{3x-1}<4 \Leftrightarrow 2^{3x-1}<2^2 \Leftrightarrow 3x-1<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty, 1)$.

Răspuns: $S=(-\infty, 1)$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$.

Rezolvare:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \Leftrightarrow x+2>-2x \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Răspuns: $S=\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

În mod analog se rezolvă inecuațiile de tipul: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a > 0,\ a \ne 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Folosind aceleași metode ca și la rezolvarea ecuațiilor exponențiale, rezolvarea inecuațiilor exponențiale, de regulă, se reduce la rezolvarea uneia din inecuațiile de tipul: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a > 0,\ a \ne 1,\ a \in \mathbb{R}$.

2 Uneori, **necunoscuta apare atît în baza puterii, cît și la exponentul ei**, adică inecuația are forma $h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$.

a) Inecuația $h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$ este echivalentă cu totalitatea de sisteme

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

b) Inecuația $h(x)^{f(x)} \ge h(x)^{g(x)}$ este echivalentă cu totalitatea de sisteme

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) \ge g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) \le g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

c) În unele cazuri e convenabil să folosim echivalența:

$$h(x)^{f(x)} \ge h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}, \\ h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)}. \end{array}\right.$$

În mod analog se examinează cazurile „>”, „≤”.

În acest manual vom rezolva astfel de inecuații numai dacă $h(x) > 0$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x-1)^x \ge (x-1)^{2x+1}$, dacă $x - 1 > 0$.

Rezolvare:

Avem $h(x) = x-1$, $f(x) = x$, $g(x) = 2x+1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$.

$$(x-1)^x \ge (x-1)^{2x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x-1 < 1 \\ x \le 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 > 1 \\ x \ge 2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1,\ 2) \\ x \in \varnothing \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1,\ 2].$$

Răspuns: $S = (1,\ 2]$.

Exerciții și probleme propuse

B

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

1. a) $6^{x-3} > 36$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+4} < \frac{1}{125}$; c) $5^{x^2+x} > 1$; d) $2^{x^2-x+8} > 0$;

e) $0{,}3^{x+5} < -4$; f) $2^x \cdot 5^x \le 0{,}01 \cdot (10^{x-2})^3$; g) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+3}$.

2. a) $25^x - 5^x - 20 \le 0$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10$; c) $0{,}49^{x+1} - 5\cdot 0{,}7^{x+1} - 14 \ge 0$.

3. a) $1000\cdot 0{,}3^{\sqrt{x+1}-1} \ge 27$; b) $(\lg 4)^{2x-5} < (\log_4 10)^{2-x}$;
c) $3^{-x+2}\cdot 5^{-x+2} > 15\cdot(225^{2x-1})^3$; d) $0{,}6^{x-3} < 5\cdot 36^{3-x}$.

4. a) propusă la începutul secvenței 4.3; b) $\frac{1}{0{,}4^x+5} < \frac{1}{0{,}4^{x+1}-1}$; c) $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$;
d) $8^x + 18^x - 2\cdot 3^{3x} \le 0$; e) $2^{2x+1} - 5\cdot 2^x + 2 > 0$; f) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} \le 3^x - 9$;
g) $\left(\frac{4}{7}\right)^{13x^2} \le \left(\frac{4}{7}\right)^{x^2+36} \le \left(\frac{49}{16}\right)^{-6x^2}$; h) $4^{\sqrt{x}+1{,}5} + 6^{\sqrt{x}} > 9^{\sqrt{x}+1}$; i) $64^x - 7\cdot 8^x + 12 \ge 0$.

5. a) $1 < 5^{|x^2-x|} < 25$; b) $|3^x - 2| - |3^x - 1| \ge |3^x + 1| - 5$; c) $6^{2|x|} - 2\cdot 18^{|x|} - 8\cdot 3^{2|x|} > 0$.

6. Să se rezolve inecuația:
a) $(2x^2 - 3x + 8)^{x^2-x-2} \ge 1$; b) $(3x-1)^{x^2-4} < (3x-1)^{3x}$; c) $|2x^2 - 7|^{|x|-1} \ge |2x^2 - 7|^{3|x-1|-1}$.

7. Să se compună o inecuație exponențială care:
a) are o unică soluție;
b) are două soluții;
c) are mulțimea soluțiilor intervalul de forma $[a, b]$;
d) are mulțimea soluțiilor intervalul de forma $(c, +\infty)$ sau $(-\infty, d)$;
e) nu are soluții.

8. Să se compună o inecuație exponențială care are mulțimea soluțiilor intervalul $(-3, 2]$.

9*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a \in \mathbb{R}$, inecuația:
a) $a^2 - 2\cdot 4^{x+1} - a\cdot 2^{x+1} > 0$; b) $\frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^{-x}}{1 + 2a^{-x}}$.

§ 5 Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice. Inecuații logaritmice

5.1. Funcția logaritmică

Se știe că funcția exponențială pentru $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ posedă funcție inversă. Inversa funcției exponențiale este numită *funcție logaritmică*. Altfel zis, este adevărată echivalența:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x,\ x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1.$$

Definiție. Se numește **funcție logaritmică** funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \ne 1$.

De exemplu, $f_1, f_2\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \log_3 x$, $f_2(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, sînt funcții logaritmice.

Majoritatea ***proprietăților funcției logaritmice*** se obțin din proprietățile funcției exponențiale cu aceeași bază.

1° $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, fiindcă $D(f)$ coincide cu codomeniul funcției exponențiale.

2° $E(f) = \mathbb{R}$ – domeniul de definiție al funcției exponențiale.

3° Funcția logaritmică ia valoarea 0 numai în punctul $x_0 = 1$, întrucît $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Graficul ei nu intersectează axa Oy, fiindcă $0 \notin \mathbb{R}_+^*$.

4° Funcția logaritmică este strict crescătoare (descrescătoare) pe $\mathbb{R}_+^*$, dacă baza $a \in (1, +\infty)$ (respectiv $a \in (0, 1)$).
Într-adevăr, pentru $a > 1$ și $x_1 > x_2$, aplicînd identitatea logaritmică fundamentală (modulul 3, secvența 3.1), obținem $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$.
Cum funcția exponențială este strict crescătoare (descrescătoare) pe $\mathbb{R}$, dacă $a > 1$ $(0 < a < 1)$, avem: $\log_a x_1 > \log_a x_2$ $(\log_a x_1 < \log_a x_2)$.

5° În baza monotoniei, dacă $a > 1$, atunci funcția logaritmică ia valori pozitive pentru $x \in (1, +\infty)$ și valori negative pentru $x \in (0, 1)$.
Dacă $0 < a < 1$, atunci funcția logaritmică ia valori pozitive pentru $x \in (0, 1)$ și valori negative pentru $x \in (1, +\infty)$.
Într-adevăr, dacă $a > 1$, atunci în baza monotoniei, $\log_a x > 0 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a 1 \Leftrightarrow x > 1$.
În mod analog se demonstrează celelalte propoziții.

6° Cum mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ nu este simetrică față de originea sistemului de coordonate, funcția logaritmică nu este nici pară, nici impară.

7° Funcția logaritmică nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}_+^*$.

8° Funcția logaritmică nu are extreme locale, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}_+^*$.

9° Funcția logaritmică este bijectivă, deci este inversabilă. Inversa ei este funcția exponențială cu aceeași bază.

10° Graficul funcției logaritmice $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, este reprezentat în figura 7.9.

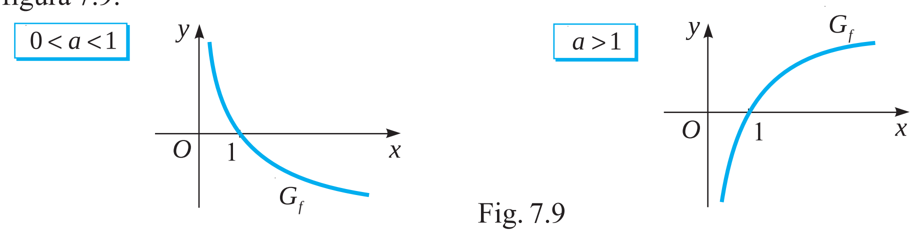


Fig. 7.9

Observație. Aplicînd monotonia funcției logaritmice, se obțin următoarele inegalități echivalente (pentru $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$):

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta, \quad a > 1,$$

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad 0 < a < 1,$$

$$\log_a \alpha = \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$

care se folosesc la rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor logaritmice.

Exercițiu rezolvat

Fie funcțiile $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) = 2^x;\ f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Să se reprezinte graficele funcțiilor logaritmice:

$g_1\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \log_2 x,\ \ g_2\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_2(x) = f_2^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

b) Să se reprezinte într-un sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f_1, f_2, g_1, g_2.

Rezolvare:

a) Construim tabelul de valori al funcțiilor g_1 și g_2:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g_1(x) = \log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$g_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

Graficele funcțiilor g_1, g_2 sînt reprezentate în figura 7.10.

b) Graficele funcțiilor f_1, f_2, g_1, g_2 sînt reprezentate în figura 7.11.

Observăm că graficele funcțiilor f_1 și g_1, f_2 și g_2 sînt simetrice față de bisectoarea cadranelor I și III.

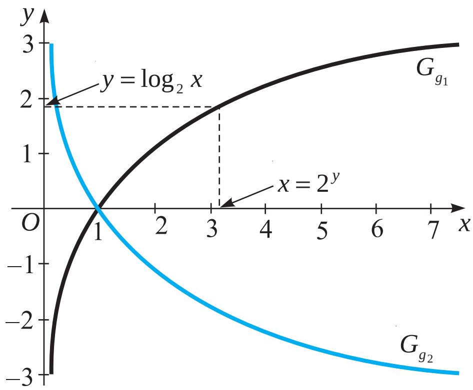


Fig. 7.10

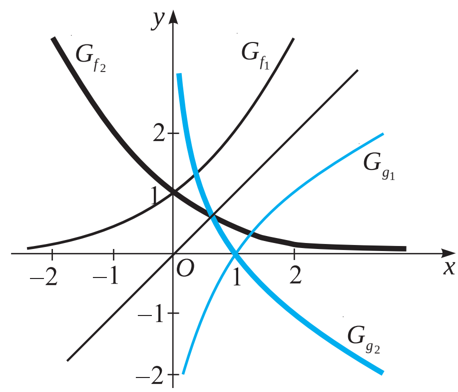


Fig. 7.11

Aplicații ale logaritmului și funcției logaritmice în diverse domenii

✓ *În chimie*: la determinarea pH-ului soluțiilor lichide.

✓ *În seismologie*: scara Richter pentru măsurarea magnitudinii puterii cutremurului.

✓ *În fizică*: intensitatea sunetului la calcularea numărului de decibeli.

✓ *În astronomie*: strălucirea unui corp ceresc; calcularea magnitudinii aparente.

✓ *În biologie*: formula moleculei ADN; cochiliile melcilor și scoicilor de mare sînt formate din porțiuni de tipul graficelor unor funcții logaritmice.

Exercițiu rezolvat

Să se compare: a) $\log_{\sqrt{3}} 2$ cu $\log_9 7$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ cu $\log_7 5$.

Rezolvare:

a) Vom transforma aceste expresii pentru a obține logaritmi în aceeași bază:

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = 2\log_3 2 = \log_3 4, \qquad \log_9 7 = \frac{1}{2}\log_3 7 = \log_3 \sqrt{7}.$$

Cum funcția logaritmică cu baza mai mare decît 1 este strict crescătoare și $4>\sqrt{7}$, rezultă că $\log_3 4>\log_3\sqrt{7}$. Deci, $\log_{\sqrt{3}} 2>\log_9 7$.

b) În baza proprietății 5° a funcției logaritmice, $\log_{\frac{1}{2}} 3<0$, iar $\log_7 5>0$.

Prin urmare, $\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_7 5$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\log_5 x$; b) $f(x)=\log_{0,1} x$; c) $f(x)=\lg x$; d) $f(x)=\ln x$.

2. Să se compare cu 0, apoi cu 1:
a) $\log_3 2$; b) $\log_3 0{,}2$; c) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5$; d) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}2$.

3. Aplicînd proprietățile funcțiilor studiate, să se compare:
a) $(\sqrt{3})^{-3}$ cu 81^{-16}; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\sqrt{5}$ cu 1; c) $\log_5\frac{1}{3}$ cu $\log_5\frac{1}{10}$.

4. Să se determine intervalele de monotonie, paritatea, mulțimea valorilor, extremele locale ale funcției definite prin formula:
a) $f(x)=5^x$; b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; c) $f(x)=\log_{1,3} x$.

B

5. Să se selecteze numerele mai mari decît 1: $\log_{1,1} 0{,}5$, $\log_{2-\sqrt{3}} 1{,}01$, $\log_{123} 120$.

6. Să se compare $\log_{\sqrt{3}} 6$ cu $\log_3 5$.

7. Pentru care valori ale lui x funcțiile $f, g\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x-1)$, $g(x)=\log_3 x$, iau valori egale.

8. Să se arate că funcția f este inversabilă și să se determine inversa ei:
a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=2^{x-3}$; b) $f\colon (2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3(x-2)$.

9. Pentru care valori ale lui x funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ ia valori mai mari decît 1, dacă:
a) $f(x)=\log_{0,2} x$; b) $f(x)=\lg(x-3)$.

10. Să se determine mulțimea $\mathbb{R}\setminus D(f)$, dacă funcția f este definită prin formula:
a) $f(x)=\lg\{x\}$; b) $f(x)=(x-2)^{\sqrt{3}}$; c) $f(x)=\sqrt{\lg(2x+1)}$.

11. Aplicînd proprietățile funcțiilor studiate, să se compare:
a) 2 cu $\log_3 8$; b) 3 cu $(\sqrt{13})^{-0,1}$; c) $5^{\frac{2}{3}}$ cu $17^{-0,3}$; d) $3^{0,1}$ cu $\log_9 7$.

12. Să se determine intervalele de monotonie, paritatea, mulțimea valorilor, extremele locale ale funcției definite prin formula:
a) $f(x)=(\sqrt{3})^{x-1}$; b) $f(x)=(\sqrt{0{,}3})^{|x-1|}$; c) $f(x)=|\log_{\sqrt{2}}(x-1)|$.

13. Să se determine $D(f)$ al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\log_{|x|}(x+2)$; b) $f(x)=\lg\frac{4-3\lg x-\lg^2 x}{\lg x}$; c) $f(x)=\lg|9-x^2|+\sqrt{x^2-1}$.

5.2. Ecuații logaritmice

Vom numi ***ecuație logaritmică*** o ecuație în care expresiile ce conțin necunoscuta apar în baza unor logaritmi şi/sau sub simbolul acestora.

De exemplu, ecuațiile $\log_3(3x-1)=2$, $\log_{x-1}(x^2-3x+2)=1$ sînt ecuații logaritmice.

Observație. Substituind suma $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ cu $\log_a(f(x)\cdot g(x))$, de regulă, DVA al expresiei $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ se extinde.

Într-adevăr, DVA al expresiei $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ este mulțimea soluțiilor sistemului $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases}$ iar DVA al expresiei $\log_a(f(x)\cdot g(x))$ este mulțimea soluțiilor totalității sistemelor $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases}$

În aceste cazuri se pot obține soluții străine ecuației date. O situație similară este şi în cazul în care expresia $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ se înlocuieşte cu expresia $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Vom examina metodele principale de rezolvare a unor tipuri de ecuații logaritmice.

1 Ecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x)=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b\in\mathbb{R}$

Ecuația $\log_a x=b$ se numeşte ***ecuație logaritmică fundamentală***.

a) Aplicînd definiția logaritmului, obținem soluția $x=a^b$.

Exemplu

Pentru ecuația $\log_3 x=2$ obținem $x=3^2=9$.

Răspuns: $S=\{9\}$.

b) Ecuația $\log_a x=b$ poate fi rezolvată şi în alt mod. Exprimăm b ca logaritm în baza a: $b=\log_a a^b$. Din $\log_a x=\log_a a^b$ obținem $x=a^b$.

Exemplu

Pentru ecuația $\log_4 x=2$ obținem $\log_4 x=\log_4 16 \Leftrightarrow x=16$.

Răspuns: $S=\{16\}$.

2 Ecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x)=\log_a g(x)$

La rezolvarea ecuațiilor logaritmice de acest tip vom ține cont de

Teorema 6. Dacă $a>0,\ a\neq 1$, atunci ecuația $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ este echivalentă cu unul din sistemele $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_5(x^2+1)=\log_5(x+3)$.

Rezolvare:

$$\log_5(x^2+1)=\log_5(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=x+3 \\ x^2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\{-1, 2\}$.

3 Ecuaţii logaritmice rezolvabile prin metoda grupării

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2(x-1)=\log_4(x+2)^4-\log_2 3x$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} x-1>0 \\ (x+2)^4>0 \\ 3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$ Grupînd termenii în mod convenabil, obţinem

$$\log_2(x-1)+\log_2 3x=\log_4(x+2)^4 \Leftrightarrow \log_2 3x(x-1)=\log_2(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2-7x-4=0,$$

cu $x_1=4\in$ DVA, $x_2=-\dfrac{1}{2}\notin$ DVA.

Răspuns: $S=\{4\}$.

4 Ecuaţii logaritmice de tipul $f(\log_a x)=0$

Ecuaţiile logaritmice de acest tip se rezolvă prin metoda utilizării necunoscutei auxiliare. Prin substituţia $\log_a x=t$, rezolvarea ecuaţiei iniţiale se reduce la rezolvarea ecuaţiilor de tipul $\log_a x=t_i$, unde t_i sînt soluţiile ecuaţiei $f(t)=0$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3^2(x+1)+\log_3(x+1)-12=0$.

Rezolvare:

DVA: $x+1>0 \Leftrightarrow x\in(-1, +\infty)$. Efectuînd substituţia $\log_3(x+1)=t$, obţinem ecuaţia $t^2+t-12=0$, cu soluţiile $t_1=3, t_2=-4$.

Rezolvăm totalitatea de ecuaţii $\left[\begin{array}{l} \log_3(x+1)=3 \\ \log_3(x+1)=-4 \end{array}\right.$ şi obţinem $\left[\begin{array}{l} x=26\in \text{DVA}, \\ x=-\dfrac{80}{81}\in \text{DVA}. \end{array}\right.$

Cum transformările sînt echivalente, rezultă că aceste numere sînt soluţiile ecuaţiei.

Răspuns: $S=\left\{-\dfrac{80}{81}, 26\right\}$.

5 Ecuaţia logaritmică de tipul $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$ este echivalentă cu unul din sistemele $\begin{cases} f(x)>0 \\ a(x)>0 \\ a(x)\neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ sau $\begin{cases} g(x)>0, \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=g(x). \end{cases}$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{x+1}(x^2-1)=\log_{x+1}(3x-1)$.

Rezolvare:

$$\log_{x+1}(x^2-1)=\log_{x+1}(3x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x^2-1=3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Răspuns: $S = \{3\}$.

6 Există ecuații logaritmice care nu se încadrează în tipurile examinate.

a) Ecuații cu logaritmi în baze diferite

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_4 x+\log_3 x=2$.

Rezolvare:

DVA: $x>0$. Aplicăm formula de schimbare a bazei: $\dfrac{\lg x}{\lg 4}+\dfrac{\lg x}{\lg 3}=2 \Leftrightarrow x=10^{\frac{2\lg 4\lg 3}{\lg 12}}$.

Răspuns: $S=\left\{10^{\frac{2\lg 4\lg 3}{\lg 12}}\right\}$.

b) Ecuații care conțin necunoscuta și în baza logaritmului, și sub simbolul acestuia

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{x+1} 5+\log_5(x+1)=2$.

Rezolvare:

DVA: $x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$. Cum $\log_{x+1} 5=\dfrac{1}{\log_5(x+1)}$, obținem:

$$\frac{1}{\log_5(x+1)}+\log_5(x+1)=2 \Leftrightarrow \log_5(x+1)=1 \Leftrightarrow x=4.$$

Răspuns: $S = \{4\}$.

c) Ecuații care conțin necunoscuta și în bazele puterilor, și la exponenții puterilor, care pot conține și logaritmi

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ ecuația $x^{\log_4 x}+4^{\log_4^2 x}=8$.

Rezolvare:

DVA: $x\in(0,\ +\infty)$. Cum $x^{\log_4 x}=(4^{\log_4 x})^{\log_4 x}=4^{\log_4^2 x}$, substituind $x^{\log_4 x}=4^{\log_4^2 x}$ în ecuația inițială, obținem ecuația $2\cdot 4^{\log_4^2 x}=8$, cu soluțiile $x_1=4\in$ DVA, $x_2=\dfrac{1}{4}\in$ DVA.

Răspuns: $S=\left\{\dfrac{1}{4},\ 4\right\}$.

7 Unele ecuații cu necunoscuta sub simbolul logaritmului pot fi rezolvate aplicînd proprietățile funcțiilor care reprezintă membrii respectivi ai ecuației.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_6(x+2)=13-3x$.

Rezolvare:

DVA: $x\in(-2,+\infty)$. Prin probe obținem soluția $x=4$. Cum funcția f, definită prin formula $f(x)=\log_6(x+2)$, este strict crescătoare pe DVA, iar funcția g, definită prin formula $g(x)=13-3x$, este strict descrescătoare pe DVA, rezultă că graficele acestor funcții au un unic punct de intersecție. Deci, ecuația are numai soluția $x=4$.

Răspuns: $S=\{4\}$.

Observație. Metodele examinate pot fi clasificate astfel:

a) ***metoda potențierii***, adică trecerea de la ecuația $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ la ecuația $f(x)=g(x)$;

b) ***metoda utilizării necunoscutelor auxiliare***;

c) ***metoda logaritmării***, adică trecerea de la ecuația $f(x)=g(x)$ la ecuația $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Exerciții și probleme propuse

A

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

1. a) $\log_2 x=4$; b) $\log_{\frac{1}{3}} x=0$; c) $\log_{100} x=1$;
d) $\log_{0,3} x=-1$; e) $\log_{\sqrt{3}} x=-2$; f) $\log_{-8} x=3$.

2. a) $\log_{0,1}(3x-1)=-1$; b) $\log_2(x^2-4)=2$; c) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x)=6$.

3. a) $\log_3(x+2)=\log_3 x^2$; b) $\log_{0,1}(x^2-x-1)=\log_{0,1}(x+4)$; c) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x}+1)=\log_{\sqrt{5}}(2\sqrt{x})$.

4. a) $3(\lg(x-1)-2)=\lg 5-\lg(x-1)$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x^2-\lg 4=\log_{\frac{1}{2}} x+\lg 25$.

5. a) $\lg(35-x^3)=3\lg(5-x)$; b) $\log_3^2(x+2)-3\log_3(x+2)-4=0$; c) $12-\lg^2 x=\lg x$.

B

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$; b) $\log_x 2+\log_2 x=-2{,}5$;

c) $\log_{\frac{1}{3}}^2 9x+\log_3\dfrac{x^2}{9}=8$; d) $2\log_4 x^2-\log_4^2(-x)=4$;

e) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x}=4,\ x>0$; f) $x^{\lg x-4}=100,\ x>0$;

g) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$; h) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$;

i) $x^{1+\log_3 x}=9x^2,\ x>0$; j) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x},\ x>0$;

k) $3^{\log_2 x^2}\cdot 5^{\log_4 x^2}=2025$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+2)=3-x$; b) $\log_4(17x-1)=2^x$; c) $1-2x=\lg\frac{x}{2000}$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\log_2(x^2-x)^2-2\log_2(x+2)=2$; b) $\log_3(3^x-8)=|2-x|$.

9. Să se compună o ecuație logaritmică cu soluțiile 0 și 2.

10. Să se compună o ecuație logaritmică ce în $\mathbb{R}$:

a) nu are soluții; b) are o unică soluție; c) are două soluții.

11*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:

a) $x^{\log_a x}=a^2x,\ a>0,\ x>0$; b) $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$; c) $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg a$.

5.3. Inecuații logaritmice

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $0{,}5^{\log_{0,1}(x^2-3x+2)}<1$.

Rezolvare:

DVA: $x^2-3x+2>0$. Cum inecuația este de tipul $a^{f(x)}<1$, unde $a=0{,}5<1$, obținem inecuația echivalentă $\log_{0,1}(x^2-3x+2)>0$. Aceasta este o inecuație logaritmică.

Vom numi ***inecuație logaritmică*** o inecuație în care expresiile care conțin necunoscuta apar în baza unor logaritmi și/sau sub simbolul acestora.

De exemplu, inecuațiile $\log_5 x<2$, $\log_{0,2}(3x-1)\geq 0$, $\lg^2 x-\lg x-6\leq 0$, $\log_{x+1}(x-3)>\log_{x+1}x$ sînt inecuații logaritmice.

Vom examina metodele principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații logaritmice.

1 Inecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$

Rezolvarea acestui tip de inecuații se bazează pe

Teorema 7. Dacă $a>1$, atunci inecuația $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ (1) este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$

Dacă $0<a<1$, atunci inecuația (1) este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

Exercițiu. Demonstrați teorema 7.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)$.

Rezolvare:

$$\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x>0 \\ 3x-1>5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x>1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1{,}5;\ 5).$$

Răspuns: $S=(1{,}5;\ 5)$.

Similar se rezolvă inecuațiile logaritmice de tipul:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x),\ \log_a f(x) < \log_a g(x),\ \log_a f(x) \leq \log_a g(x), \qquad (2)$$

unde $a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea inecuației logaritmice, de regulă, se reduce la rezolvarea uneia dintre inecuațiile (1) sau (2).

2 Inecuații logaritmice de tipul $\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$

Această inecuație este echivalentă cu totalitatea de sisteme:

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_{x+1}(2x+1) \geq \log_{x+1}(x-1)$.

Rezolvare:

$$\log_{x+1}(2x+1) \geq \log_{x+1}(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>1 \\ x-1>0 \\ 2x+1 \geq x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+1<1 \\ 2x+1>0 \\ 2x+1 \leq x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1.$$

Răspuns: $S = (1, +\infty)$.

În mod analog se rezolvă inecuațiile logaritmice de tipurile:

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x),\ \log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x),\ \log_{h(x)} f(x) \leq \log_{h(x)} g(x).$$

3 Rezolvarea inecuațiilor logaritmice prin logaritmare

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ inecuația $x^{2\lg x} > 100$.

Rezolvare:

DVA: $x \in (0, +\infty)$. Deoarece în DVA ambii membri ai inecuației sînt pozitivi, logaritmăm în baza 10 și obținem: $\lg x^{2\lg x} > \lg 100 \Leftrightarrow 2\lg^2 x > 2$.

Deci, $\lg^2 x > 1 \Leftrightarrow (\lg x - 1)(\lg x + 1) > 0$. Obținem $\lg x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x < -1 \\ \lg x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{10}, \\ x > 10. \end{array}\right.$$ Ținînd cont de DVA, $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Răspuns: $S = \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Observație. Dacă expresia se logaritmează în baza a, $a>1$, atunci semnul („<”, „≤”, „>”, „≥”) inecuației obținute la logaritmare rămîne acelaşi ca şi în inecuația inițială; dacă expresia se logaritmează în baza a, $0<a<1$, atunci semnul inecuației obținute la logaritmare se schimbă în opus.

Exerciții şi probleme propuse

B

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

1. a) $\log_2(1-x)<0$; b) $\lg(x^2+1)\le 1$; c) $\ln(3-2x)\le 0$;
d) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-7)>-2$; e) $\log_{0,1}(x^2-3x+2)>0$; f) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x)\ge 2$.

2. a) $\log_4(x^2+1)\ge\log_4(3x+1)$; b) $\log_{\frac{2}{3}}(2-x)\le\log_{\frac{2}{3}}(5x-8)$; c) $\lg(2x+1)>\log_{\frac{1}{10}}x$.

3. a) $\log_2(x-3)-\log_2 2x\ge 1$; b) $\lg(2x-4)+\lg 3x<\lg(x+1)$.

4. a) $\lg^2(2x+3)-12\lg(2x+3)+20\le 0$; b) $2\log^2_{\frac{1}{5}}6x-5\log_{\frac{1}{5}}6x+3>0$;
c) $\dfrac{1}{1+\log_3 x}+\dfrac{1}{1-\log_3 x}<2$; d) $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)-5\le 0$.

5. a) $\log_{\frac{x-1}{2x+1}}0,5>1$; b) $\log_x(x^3-x^2+x+2)\le 3$;
c) $\log_{0,3}\left[\lg\dfrac{x^2-1}{x+3}\right]\ge 0$; d) $\dfrac{\log_4(2-3x)}{x-4}<0$;
e) $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2\le 0$; f) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x\ge 1$;
g) $\dfrac{\ln 6-\ln(10-x^2)}{\ln(x+2)}<0$; h) $\log_3(\log_2(2-\log_4 x))>1$;
i) $x^{\log_2 x}+16\cdot x^{-\log_2 x}>17$, $x>0$; j) $\log_{x^2-1}3x\le\log_{x^2-1}(4-x)$.

6. a) $\log_3|x+5|-\log_{\frac{1}{3}}|x-1|\ge\log_3 x$; b) $\log_{|x-1|}(x-4)\le 2$;
c) $\dfrac{\log_{0,2}|x+1|}{x^2-9x}>0$; d) $\log_{|x|}\sqrt{20-9x}>1$.

7. Să se compună în $\mathbb{R}$ o inecuație logaritmică ce are mulțimea soluțiilor intervalul $[0,+\infty)$.

8*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, inecuația:
a) $\log_a(1-x^2)\ge 1$; b) $x^{\log_a x}>a$, $x>0$; c) $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+1)$.

9*. Fie inecuația $\left(\log_2\dfrac{4a+4}{a}\right)\cdot x^2+2\left(\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)\cdot x+\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}>0$. Să se determine toate valorile parametrului real a, astfel încît inecuația să fie adevărată pentru orice valori reale ale lui x. (Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova, 2012)

5.4. Sisteme, totalități de ecuații exponențiale și logaritmice

Nu există o metodă unică și universală de rezolvare a sistemelor (totalităților) de ecuații exponențiale și logaritmice. La rezolvarea lor vom folosi atît metode aplicate la rezolvarea sistemelor (totalităților) de ecuații algebrice, cît și metodele studiate, valabile pentru ecuațiile ce formează sistemul dat (totalitatea dată).

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 2^x\cdot 3^{2y}=12, \\ 2^{2y}\cdot 3^x=18. \end{cases}$

Rezolvare:

DVA: $(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Înmulțind ecuațiile membru cu membru, obținem:

$$2^{x+2y}\cdot 3^{x+2y}=6^3 \Leftrightarrow 6^{x+2y}=6^3 \Leftrightarrow x+2y=3.$$

Împărțind membru cu membru prima ecuație la a doua (toți termenii ecuațiilor iau valori nenule în $\mathbb{R}$), obținem $2^{x-2y}\cdot 3^{2y-x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2y}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-2y=1.$

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea sistemului de ecuații algebrice $\begin{cases} x+2y=3, \\ x-2y=1, \end{cases}$ a cărui soluție este $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$. Luînd în considerație echivalența transformărilor, constatăm că $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ este soluția sistemului inițial.

Răspuns: $S=\left\{\left(2,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1)\cdot\lg(3x^3-18x^2+1)=0.$

Rezolvare:

DVA: $3x^3-18x^2+1>0$. În DVA ecuația inițială este echivalentă cu totalitatea de ecuații $\left[\begin{array}{l} 16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1=0, \\ \lg(3x^3-18x^2+1)=0. \end{array}\right.$

Rezolvăm prima ecuație: $16\cdot 4^{2x-1}-12\cdot 4^{x-1}-1=0\Leftrightarrow 4\cdot 4^{2x}-3\cdot 4^x-1=0$ și obținem soluția $x_1=0$. (Verificați!)

Rezolvăm ecuația a doua $\lg(3x^3-18x^2+1)=0$. Ea este echivalentă cu ecuația $3x^3-18x^2+1=1\Leftrightarrow 3x^3-18x^2=0,$ care are soluțiile $x_2=0,\ x_3=6$. Substituind valorile 0 și 6 în inecuația $3x^3-18x^2+1>0,$ ne convingem că ele aparțin DVA al ecuației inițiale. Atunci totalitatea, deci și ecuația inițială, are soluțiile 0 și 6.

Răspuns: $S=\{0,\ 6\}$.

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ x+y=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^x-2^{2y}=77, \\ 5^{\frac{x}{2}}-2^y=7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 16^x=48y, \\ 4^x=3y; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x+\lg y=\lg 10, \\ x^2+y^2=16; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_3^2 y+\log_3^2 x=1, \\ 2\log_3 y\cdot\log_3 x=3; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 10^{2-\lg(x-y)}=3^{2\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}}, \\ \lg(x-y)=\lg 40-\lg(x+y); \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^y\cdot 3^x=81, \\ \ln(y+x)^2=\ln x+2\ln 3; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ 2x^2-y=3; \end{cases}$ i) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4, \\ 3^x+2\cdot 3^{y-2}=171. \end{cases}$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ totalitatea de ecuații:

a) $\left[\begin{array}{l} \lg^2(x+1)-9\lg(x+1)-10=0, \\ 2^{2x}+2^{x+1}+24=0; \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} \log_3(5-x)-\frac{1}{3}\log_3(35-x^3)=0, \\ x^{\lg x}=10; \end{array}\right.$

c) $\left[\begin{array}{l} 4^x+10^x=2\cdot 25^x, \\ \log_3(7-2x)-\log_3(x^2-3x-5)=0; \end{array}\right.$ d) $(5^{2x}-2\cdot 5^x)(1+3\log_{\frac{1}{2}} x)=0.$

B

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y); \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12},\ \ x>0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125,\ \ x>0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^{x-2y}=25, \\ 4(x-2y)+\log_5 x=9,\ \ x>0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x-\log_{\frac{1}{x}} y)=10, \\ xy=81; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{y^2-7y+12}=1,\ \ x>0, \\ |x+y|=8; \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log_{|xy|}|x+y|=1, \\ 2(\log_4|xy|)\cdot\log_{|xy|}|x-y|=1; \end{cases}$ h) $\begin{cases} \lg y\cdot\lg(x-y)=\lg x\cdot\lg(x+y), \\ \lg x\cdot\lg(x-y)=\lg y\cdot\lg(x+y). \end{cases}$

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2\cdot\log_2^2 x+2x\log_2 x=x^2\cdot\log_2 x+2x\log_2^2 x;$ b) $3x\cdot 8^x+3x\cdot 18^x=2x\cdot 27^{x+\frac{1}{3}};$

c) $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^x;$ d) $x\sqrt{\log_5 x}+x\cdot\sqrt[3]{\log_5 x}=5^{\log_5(2x)}.$

5. Să se compună un sistem de ecuații logaritmice și exponențiale, care în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:
a) are două soluții; b) are o unică soluție; c) nu are nici o soluție.

6. Să se compună un sistem de ecuații logaritmice (exponențiale), a cărui soluție să fie perechea de numere reale $(0, 2)$.

7*. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, sistemul:

a) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\frac{5}{2}, \\ x+y=a^2+a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg^2 x+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a^2, \\ xy=a^2,\ \ a>0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^{2x+y}+3^{x+3y}=3, \\ 3^y+\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3y}=3^{a-2x}. \end{cases}$

Exerciții și probleme recapitulative

A

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{5}$; b) $f(x) = (\sqrt{3}-2)x - 7$; c) $f(x) = \frac{2}{17}x - \frac{3}{53}$
1) să se determine zeroul;
2) să se determine intervalul în care f ia valori pozitive;
3) să se reprezinte graficul G_f.

2. Olga are acumulată suma de 500 lei. Estimîndu-și posibilitățile, ea a decis că poate lunar să adaoge la această sumă cîte 80 lei.
a) Să se determine funcția care descrie dependența dintre suma acumulată și numărul de luni.
b) Peste cîte luni ea va acumula suma de 1900 lei, necesară pentru procurarea unui calculator?

3. Temperatura solului la suprafața pămîntului este de 20°C, la adîncimea de 2 km, temperatura este de 90°C, iar la adîncimea de 10 km – de 370°C.
a) Presupunînd că dependența dintre temperatură și adîncime este liniară, să se determine această funcție.
b) Să se afle temperatura solului la adîncimea de 3,5 km.

4. Arenda unui autoturism pentru o zi depinde de distanța parcursă și constituie (de exemplu): 41 \$ pentru 100 de mile; 51,8 \$ pentru 160 de mile; 63,5 \$ pentru 225 de mile.
a) Să se arate că dependența dintre costul arendei și numărul de mile parcurse de autoturism este liniară și să se determine funcția respectivă.
b) Ce sumă trebuie achitată, dacă autoturismul a parcurs 200 de mile?

5. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + (x+3)^2$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

6. Să se determine intervalele pe care funcția $f: D \to \mathbb{R}$ ia valori pozitive, dacă:
a) $f(x) = x^2 + x - 6$; b) $f(x) = \frac{4}{2-x}$; c) $f(x) = \log_6(x+2)$; d) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.

7. Înălțimea h (de la podea) la care se află o minge aruncată în sus se determină conform formulei $h(t) = -t^2 - 0{,}5t + 1{,}5$, unde t este timpul (măsurat în secunde), $t \in [0; 1{,}5]$.
a) Să se determine momentul de timp t în care mingea se află la înălțimea maximă.
b) Peste cît timp mingea va cădea pe podea?

8. Într-un rîu din America de Sud, nivelul apei s-a ridicat după ploaie. El a început să scadă cu 3 țoli pe oră (1 țol = 2,54 cm) și la moment este cu 3 picioare mai sus de nivelul normal (1 picior = = 30 cm). Presupunînd că nivelul apei scade uniform, să se scrie funcția de gradul I ce descrie dependența dintre nivelul apei (mai sus de cel normal) și timp. Peste cîte ore nivelul apei va reveni la cel normal?

9. Utilizînd proprietățile funcțiilor studiate, inclusiv graficele lor, să se compare:
a) $\sqrt[3]{720}$ cu $\sqrt[3]{722}$; b) $\sqrt[5]{-91}$ cu $-\sqrt[5]{91{,}2}$; c) $(\sqrt{2}-1)^{15}$ cu 1;
d) $3^{-\frac{2}{7}}$ cu $4^{-\frac{2}{7}}$; e) $\log_3 \pi$ cu $\log_3 3{,}1$; f) $\log_{0{,}1} \pi$ cu $\log_{0{,}1} \pi^2$.

B

10. Utilizînd proprietățile funcțiilor studiate, să se compare:

a) $\sqrt[7]{\pi}$ cu $\sqrt[7]{\frac{17}{5}}$; b) $(1{,}7)^{-\frac{5}{3}}$ cu $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{3}}$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$ cu $(\sqrt{2})^{-3}$;

d) $\log_{0,9}(2-\sqrt{3})$ cu $\log_{0,9}\sqrt[13]{2}$; e) $\log_{\sqrt{3}}17$ cu $\log_3 5$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(\sqrt{3})^x = -1$; b) $15^x = 3^x \cdot 5^{\sqrt{2}}$; c) $\log_{\sqrt{3}}(|x|+2) = -2$;

d) $\log_2 3x = \log_{32} 21$; e) $\sqrt[4]{x+2} = 0{,}5-\sqrt{3}$; f) $\pi^{x^2+4} = \pi^2$.

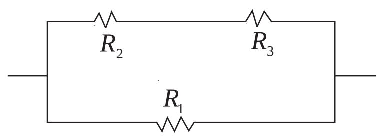
12. Să se determine domeniul de definiție al funcției definite prin formula:

a) $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}-\sqrt{x}$; c) $f(x)=(x+1)^{-\frac{1}{3}}$.

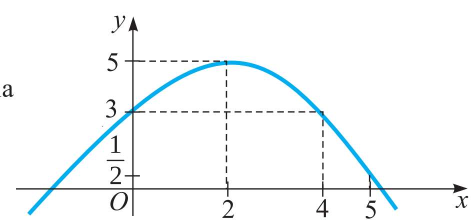
13. Să selecteze numerele din mulțimea $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{3}-2\}$ care aparțin mulțimii de valori a funcției f şi să se determine valorile respective ale lui x:

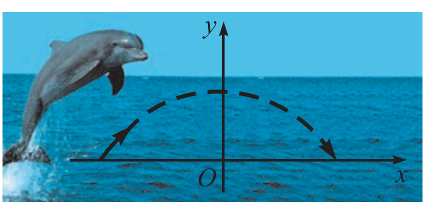
a) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$; b) $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$.

14. Pentru circuitul reprezentat se ştie:
$R_{\text{total}} = 2{,}25\,\Omega$, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$.
Să se determine R_3.



15. Folosind datele din desen, să se determine funcția respectivă de gradul II $f(x)=ax^2+bx+1$.





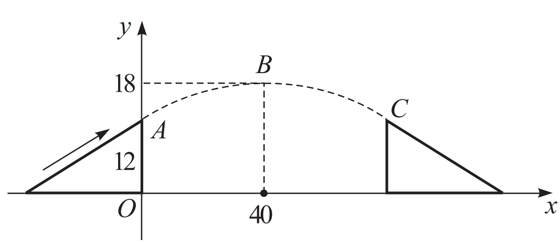
16. Un delfin sare din apă şi urmează traseul:

$$y=-\frac{5}{36}x^2+20.$$

a) La ce înălțime maximă deasupra apei ajunge delfinul?

b) Care este distanța dintre punctele de ieşire şi de intrare în apă?

17. Un motociclist se deplasează pe un plan înclinat şi, parcurgînd o parte din drum prin aer, ajunge pe un alt plan înclinat. În baza datelor din desen, să se determine funcția de gradul II, a cărei porțiune de grafic reprezintă traiectoria ABC.



18*. Să se precizeze dacă funcția f este inversabilă şi să se determine inversa ei:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$; b) $f:[2,\infty)\to[-1,\infty)$, $f(x)=x^2-4x+3$.

19*. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = |2x| + m$; b) $f(x) = (m+1)x + m - 2$.

20*. Numărul real pozitiv x satisface inegalitatea
$$|\log_9 x^{2x} - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}| + ||1-x| - |\log_3 x|| \le (x-1)\log_{27} x^{x^3}.$$
Să se determine numărul $\log_3 \dfrac{9x}{3^x}$. (Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova, 2010)

Proba de evaluare II

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Determinați valoarea de adevăr a propoziției: $2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 5^x + 15 = 0.$ 2

2. Dacă vom aduna vîrsta tatălui și a fiului, vom obține 52 de ani. Peste 8 ani, valoarea raportului dintre vîrsta tatălui și vîrsta fiului va fi egală cu 3. Aflați cîți ani are tatăl și cîți fiul. 2

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(\dfrac{x}{x-1} + x - 2\right)(100^{\lg(x-1)} - 2) = 0.$ 3

4. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} 4\log_4(x-y) + \log_2(x+y) = 6, \\ \sqrt{x-y} = 2. \end{cases}$ 3

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

B

1. Pe parcursul celor 10 luni ale unui an, veniturile unei firme de vînzare a autoturismelor au variat (în mii lei) conform legii: $f(x) = \begin{cases} -x+2, & 0 \le x \le 2 \\ -2x^2 + 20x - 32, & 2 < x \le 10. \end{cases}$ 2

a) Reprezentați graficul veniturilor firmei.
b) Determinați:
1) în care din aceste 10 luni veniturile firmei au fost maxime;
2) perioadele în care firma a lucrat în pierdere;
3) perioadele de creștere a veniturilor;
4) perioadele de descreștere a veniturilor.

2. Scrieți ecuația cercului circumsris triunghiului determinat de dreapta de ecuație $y = 3x + 6$ și de axele de coordonate. 1

3. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+1). \end{cases}$ 2

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $9^{2x-\sqrt{x^2-1}} - 4 \cdot 3^{2x+1-\sqrt{x^2-1}} + 27 \ge 0.$ 2

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $36^{|x|} - 2 \cdot 6^{|x|} + a = 0$, unde a este parametru real. 3

$D(f)$ — **Funcții elementare. Ecuații. Inecuații** — **DVA**

Funcția de gradul I / Funcția de gradul II

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$
$a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax^2 + bx + c,$
$a \neq 0,\ \ a, b, c \in \mathbb{R}$

Ecuații

$ax + b = 0$
$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
$\frac{A(x)}{B(x)} = 0,\ A(x), B(x)$ – polinoame

Inecuații

$ax + b > 0$ (sau $<, \leq, \geq$)
$ax^2 + bx + c > 0,\ a \neq 0$ (sau $<, \leq, \geq$)
$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (sau $<, \leq, \geq$)

Sisteme, totalități

$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} ax + b > c \\ a_2x^2 + b_1x + c_1 < 0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x(x-1) \leq 0 \\ \frac{x}{x+4} > 0 \end{cases}$ ș.a.

Funcția radical / Funcția putere

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$
$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt[2n]{x}$
$h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ h(x) = x^{\alpha},$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ecuații iraționale

$\sqrt{f(x)} = g(x)$
$f(x)\sqrt[2k]{g(x)} = 0,\ k \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x),\ k \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ ș.a.

Inecuații iraționale

$\sqrt{f(x)} < g(x)$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x)$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} = 5 \\ 3 - \sqrt{x} = x \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} \leq x \\ x\sqrt{x} > \sqrt{x+2} \end{array}\right.$ ș.a.

Funcția exponențială

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = a^x,$
$a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$

Ecuații exponențiale

$a^{f(x)} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a, b \in \mathbb{R}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$
$f(a^x) = 0$
$h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ ș.a.

Inecuații exponențiale

$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$
$h(x)^{f(x)} < h(x)^{g(x)}$
$f(a^x) > 0$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} 4^x - 2^x = y \\ 8^x + 2y = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 3 \cdot 9^x + 3^x = 0 \\ 5^x - 5^{x-1} = 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 64^x + 3 \cdot 8^x - 4 < 0 \\ 1 - 5^{|x|} < 25 \end{cases}$ ș.a.

Funcția logaritmică

$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,$
$a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$

Ecuații logaritmice

$\log_a f(x) = b,\ a > 0,$
$a \neq 1,\ a, b \in \mathbb{R}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$
$f(\log_a x) = 0$
$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ ș.a.

Inecuații logaritmice

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$
$\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$ ș.a.

Sisteme, totalități

$\begin{cases} \lg x + \lg y = 0 \\ 2\lg x - 3\lg y = 1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \ln^2 x - \ln x = 0 \\ \lg(x+1) = \lg(x^2 - 4) \end{array}\right.$

$\begin{cases} \log_3(x-1) > \log_9 x \\ \ln\frac{x}{x-1} \leq 0 \end{cases}$ ș.a.

Alte (de ex., funcții trigonometrice)

Alte ecuații, inecuații și sisteme, totalități

Mixte

$\sqrt{2^x} - \sqrt{4^x} = 0$
$\log_2 \sqrt{x-1} > \log_2 x$
$\begin{cases} x + y = 2 \\ \lg x + \lg y = -1 \end{cases}$ ș.a.

Simetrice

$x + y + xy = 0$
$x^2 + y^2 = 1$
$\begin{cases} 2x + 2y - xy = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ș.a.

Omogene

$2x + 3y = 0$
$x^2 - xy + y^2 = 0$
$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 2 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ ș.a.

Ecuații (inecuații, sisteme, totalități) cu necunoscuta în modul și/sau cu parametru

MODULUL 8 Elemente de trigonometrie

Ochii înțeleptului văd mai departe.
Proverb

Obiective

- măsurarea unghiurilor folosind diverse unități de măsură;
- utilizarea cercului trigonometric la rezolvarea unor exerciții şi probleme;
- *utilizarea în diverse contexte a proprietăților funcțiilor trigonometrice şi a proprietăților funcțiilor trigonometrice inverse;
- identificarea şi utilizarea identităților fundamentale ale trigonometriei şi a formulelor trigonometrice în diverse contexte;
- *identificarea ecuațiilor şi inecuațiilor trigonometrice şi aplicarea diverselor metode de rezolvare a acestora;
- aplicarea elementelor de trigonometrie în diverse domenii.

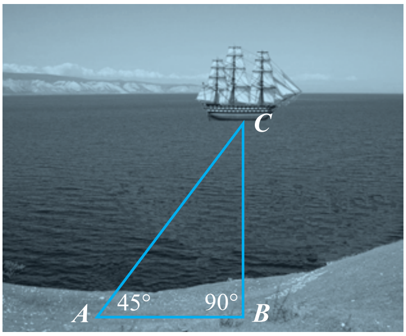
§ 1 Funcții trigonometrice

1.1. Sisteme de măsură pentru unghiuri şi arce. Generalizarea noțiunilor de unghi şi de arc

Ştiați că...

Grecii antici primii au învățat să determine distanța de la țărm pînă la corabia din mare. Observați desenul şi argumentați cum procedau grecii antici.

Concluzie: acelaşi procedeu poate fi utilizat în orice situație de acest fel (formulați exemple). Adică elementele de trigonometrie, măsurile unghiurilor sînt aplicabile în diverse domenii, inclusiv în viața cotidiană.



1 ***Măsura în grade***

Se ştie că fiecărui arc circular îi corespunde un unghi la centru unic determinat. În trigonometrie se folosesc două unități de măsură a unghiurilor: gradul şi radianul.

În sistemul de măsură în grade, unitatea de măsură a unghiului este ***gradul*** (1°), definit ca măsura unghiului egal cu a 90-a parte din unghiul drept. Submultiplii săi sînt ***minutul*** (1′), egal cu a 60-a parte din grad, şi ***secunda*** (1″) – a 60-a parte din minut.

Deci, $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Măsura unghiului alungit (desfăşurat) este de $180°$ (de 2 ori mai mare decît a unghiului drept); măsura unghiului complet (în jurul unui punct) este de $360°$.

2 *Măsura în radiani*

Sistemul de măsură în radiani a unghiurilor are la bază următoarea afirmație: raportul dintre lungimea arcului circular, corespunzător unui unghi la centru, şi lungimea razei cercului este o mărime constantă, care nu depinde de lungimea razei.

Definiție. Fie l lungimea arcului circular de rază r. Numărul α, egal cu raportul dintre lungimea arcului circular şi lungimea razei cercului, se numeşte **măsura în radiani a arcului** (şi a unghiului la centru, corespunzător acestui arc), adică

$$\alpha = \frac{l}{r}. \qquad (1)$$

Dacă în (1) considerăm $l = r$, atunci $\alpha = 1$. Prin urmare, în acest sistem de măsură, unitatea de măsură numită ***radian*** (notat **rad**) este măsura unghiului la centru, corespunzător arcului circular de lungimea razei cercului (fig. 8.1).

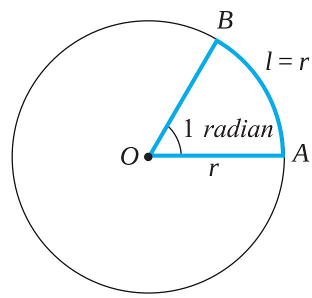


Fig. 8.1

Exemple

1. Măsura în radiani (α) a unghiului complet este 2π. Într-adevăr, cum lungimea cercului este $2\pi r$, rezultă că $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad, unde $\pi \approx 3{,}1416$ este un număr irațional.

2. Măsura în radiani a unghiului alungit este π, iar a unghiului drept este $\frac{\pi}{2}$.

3 ***Trecerea de la o unitate de măsură la alta*** a unui unghi se realizează prin

relația $\frac{a}{\alpha} = \frac{180°}{\pi}$ (2), unde a este măsura în grade, iar α – măsura în radiani a unghiului.

Din (2) rezultă că $\alpha = \frac{a}{180°} \cdot \pi$ rad, $a = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180°$.

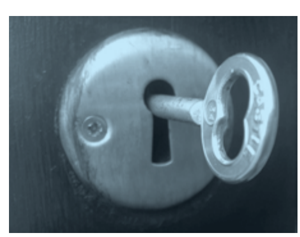
Exemple

1. Unghiul de $45°$ are în radiani măsura $\alpha = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4}$.

2. Unghiul de 1 radian are în grade măsura $a = \frac{180° \cdot 1}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}1416} \approx 57°17'44''$.

4 *Unghiuri şi arce orientate*

În geometrie, unghiul se consideră ca reuniunea a două semidrepte închise care au aceeaşi origine, însă acest concept nu poate fi aplicat în unele domenii practice. De exemplu, nu este suficient să spunem „Răsuceşte piulița cu 30°” – trebuie să indicăm şi direcția de rotație. Deseori, este necesar să rotim un ax, o cheie cu un unghi mai mare decît $360°$. Pentru soluționarea acestor probleme, vom generaliza noțiunile de unghi şi arc, examinînd ***unghiuri*** şi ***arce orientate***.



În plan sînt două sensuri pentru rotația unei semidrepte în jurul originii sale: sensul opus mişcării acelor de ceasornic, numit ***sens pozitiv***, şi sensul mişcării acelor de ceasornic, numit ***sens negativ***. Sensul de rotație se arată cu o săgeată (fig. 8.2). Considerăm că unghiul orientat AOM este generat de semidreapta $[OA$, care se roteşte în jurul originii sale. Întrucît orice unghi orientat AOM are una din laturi semiaxa pozitivă $[Ox$, considerăm pentru viitor că unghiul AOM este determinat de semidreapta $[OM$. În concordanță cu sensul rotației semidreptei $[OA$, vom numi unghiul AOM (şi arcul pe care îl descrie punctul A) ***pozitiv*** sau ***negativ***.

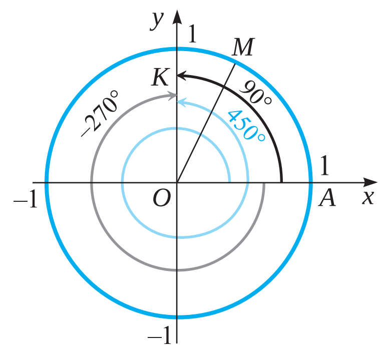


Fig. 8.2

Fie semidreapta $[OM$ formează cu direcția pozitivă a axei Ox unghiul de măsură α $(0<\alpha<2\pi)$. Dacă semidreapta $[OA$ mai efectuează n $(n\in\mathbb{N}^*)$ rotații complete, atunci vom obține un unghi de măsura $\alpha+2\pi n$ sau $\alpha-2\pi n$, după cum rotațiile se efectuează în sens pozitiv sau negativ. În figura 8.2 sînt indicate trei unghiuri formate de semidreapta $[OK$ cu semidreapta $[OA$: un unghi de măsura $90°$ $\left(\text{sau } \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$, al doilea – de măsura $450°$ $\left(\text{sau } \frac{5\pi}{2} \text{ rad}\right)$, al treilea – de măsura $-270°$ $\left(\text{sau } -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}\right)$. În general, măsura oricărui unghi orientat, format de semidreptele $[OK$ şi $[OA$ în situația descrisă, poate fi determinată aplicînd formula: $a=90°+n\cdot 360°,\ n\in\mathbb{Z}$ (sau $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbb{Z}$).

Definiție. **Cerc trigonometric** se numeşte cercul de rază 1 cu centrul în originea sistemului de coordonate.

Vom examina, de regulă, unghiuri determinate de semidreapta $[OM$ şi de semiaxa pozitivă $[Ox$, unde punctul M aparține cercului trigonometric (fig. 8.2). Vom spune că unghiul AOM aparține cadranului I, II, III sau IV, după cum punctul M aparține cadranului I, II, III sau respectiv IV, iar punctul A aparține semidreptei $[Ox$.

În aceste condiții se obține o corespondență bijectivă dintre mulțimea unghiurilor orientate (mulțimea arcelor) şi mulțimea numerelor reale, avînd stabilită unitatea de măsură – gradul sau radianul. Ținînd cont de această corespondență, convenim ca prin $\alpha,\ \beta$ etc. să se noteze atît unghiul, cît şi măsura lui.

1.2. Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă

Problemă. Să se determine înălțimea unui stîlp de telegraf (perpendicular pe suprafața pămîntului), folosind numai un instrument de măsurat lungimea segmentelor.

Rezolvare:

Fie AB înălțimea stîlpului, d – o dreaptă perpendiculară pe AB ce trece prin punctul A (fig. 8.3). În punctul A_1 $(A_1\neq A)$ amplasăm vertical (paralel cu AB) o bară rectilinie $[A_1B_1]$, a cărei lungime este cunoscută. Vizual, determinăm punctul O pe dreapta d, astfel încît punctele O, B_1, B să fie coliniare. Evident că triunghiurile dreptunghice OA_1B_1 şi OAB sînt asemenea, de aceea $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{OA_1}$, de unde $AB=\frac{A_1B_1}{OA_1}\cdot OA$. Cum lungimile segmentelor OA_1, A_1B_1, OA pot fi determinate prin măsurări, vom calcula lungimea segmentului AB.

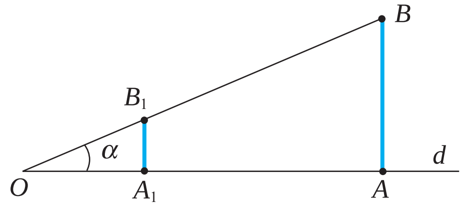


Fig. 8.3

În baza faptului că în triunghiurile dreptunghice (asemenea) OA_1B_1, OAB (fig. 8.3) rapoartele de tipul $\frac{A_1B_1}{OA_1}$, $\frac{AB}{OA}$ au valoare constantă, au fost definite noţiunile *sinus*, *cosinus*, *tangentă*, *cotangentă* pentru mărimile unghiurilor ascuţite. Anume:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{OB},\ \cos\alpha=\frac{OA}{OB},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{OA},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{OA}{AB}.$$

Definirea funcţiilor trigonometrice pentru măsura unghiului arbitrar are ca suport următoarea

Lemă. Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ puncte într-un sistem cartezian de coordonate xOy şi $y_1\cdot y_2\neq 0$. Dacă semidreptele $[OM_1$, $[OM_2$ coincid ($M_1\neq O$, $M_2\neq O$), atunci $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$, $\frac{x_1}{OM_1}=\frac{x_2}{OM_2}$, $\frac{y_1}{OM_1}=\frac{y_2}{OM_2}$ (fig. 8.4).

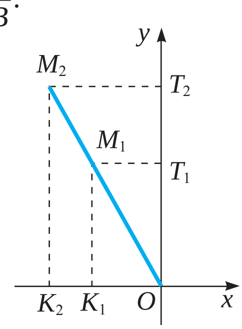


Fig. 8.4

Definiţii. Fie cercul trigonometric şi unghiul α format de semidreapta $[OM$ cu semiaxa pozitivă $[Ox$ (punctul $M(x, y)$ aparţine cercului trigonometric) (fig. 8.5).

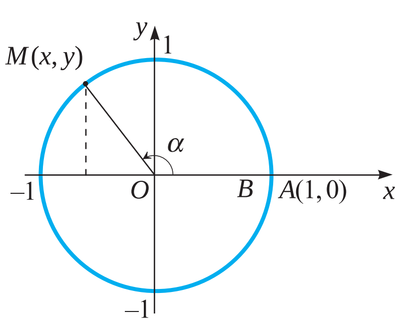


Fig. 8.5

- **Sinusul unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este ordonata punctului M (adică $\sin\alpha=y$).
- **Cosinusul unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este abscisa punctului M (adică $\cos\alpha=x$).
- **Tangenta unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este raportul dintre ordonata şi abscisa punctului M (adică $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{x},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).
- **Cotangenta unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este raportul dintre abscisa şi ordonata punctului M (adică $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{x}{y},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$).

Observație. Au fost definite, de fapt, funcții numerice pe submulțimi ale mulțimii numerelor reale, deoarece măsura în radiani a oricărui unghi este un număr real.

Definiții. Se numește funcție:
- **sinus** – funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
- **cosinus** – funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;
- **tangentă** – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;
- **cotangentă** – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Observație. În unele cazuri se mai folosesc și funcțiile:
secantă – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;
cosecantă – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Funcțiile sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă și cosecantă se notează **sin**, **cos**, **tg**, **ctg**, **sec** și respectiv **cosec** și se numesc ***funcții trigonometrice***.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice sin, cos, tg, ctg pentru unghiurile de măsuri 0, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$.

Rezolvare:

Unghiurile 0, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ sînt determinate respectiv de semidreptele $[OA$, $[OC$, $[OD$ (fig. 8.6). Cum unghiurile COC_1 și DOD_1 au măsurile de $\frac{\pi}{4}$ și respectiv $\frac{\pi}{3}$ radiani, din triunghiurile OC_1C, OD_1D obținem $OC_1 = CC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $DD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OD_1 = \frac{1}{2}$, ceea ce permite să determinăm coordonatele punctelor respective: $A(1, 0)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

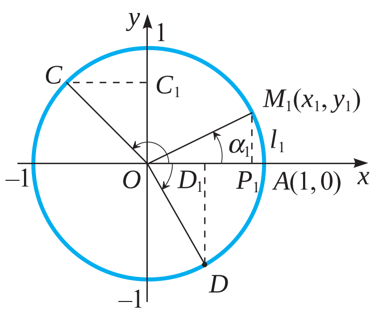


Fig. 8.6

Astfel, aplicînd definițiile funcțiilor trigonometrice, obținem:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, iar $\operatorname{ctg} 0$ nu există.

În mod analog se obțin valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri frecvent folosite (tab. 1).

Tabelul 1

	α (radiani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (grade)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
Valoarea funcției	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există
	$\operatorname{ctg}\alpha$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.3. Proprietățile fundamentale ale funcțiilor trigonometrice

I. Funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

1° ***Domeniul de definiție***. $D(\sin) = \mathbb{R}$, fiindcă pentru fiecare $\alpha \in \mathbb{R}$ se determină în mod unic ordonata punctului M de pe cercul trigonometric, unde $[OM$ formează unghiul de măsura α cu semiaxa pozitivă $[Ox$ (fig. 8.7).

2° ***Domeniul valorilor***. $E(\sin) = [-1, 1]$. Incluziunea $[-1, 1] \supseteq E(\sin)$ este evidentă, fiindcă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $|\sin\alpha| = |y_M| \le 1$.

Incluziunea inversă $[-1, 1] \subseteq E(\sin)$ se obține folosind cercul trigonometric. Pentru orice $a \in [-1, 1]$ examinăm pe axa Oy punctul $K(0, a)$ (fig. 8.7). Dreapta paralelă cu axa Ox ce trece prin punctul K va intersecta cercul trigonometric cel puțin într-un punct, M. Din construcție rezultă că pentru orice unghi α determinat de semidreapta $[OM$ avem $\sin\alpha = a$, adică a este o valoare a funcției sinus. Se obține $E(\sin) = [-1, 1]$.

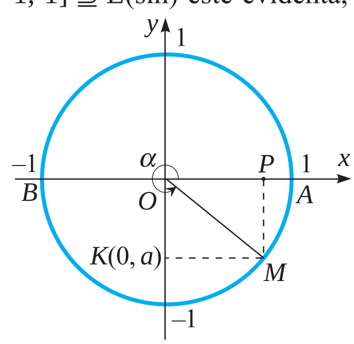


Fig. 8.7

3° ***Zerourile*** funcției sinus sînt soluțiile ecuației $\sin\alpha = 0$, adică $y = 0$. Se știe că punctele au ordonata zero, dacă ele aparțin axei Ox. În figura 8.7, acestea sînt punctele A şi B. Unghiurile determinate de semidreapta $[OA$ au măsura $0 + 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar cele determinate de semidreapta $[OB$ au măsura $\pi + 2\pi \cdot m,\ m \in \mathbb{Z}$. Reuniunea acestor două mulțimi numerice este mulțimea $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Astfel, zerourile funcției sinus sînt numerele $x \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției sinus cu axa Oy sînt determinate de egalitatea $\sin 0 = 0$, adică sînt $(0, 0)$.

4° ***Periodicitatea***. Din definiția funcției sinus rezultă că $\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha-2\pi)=\sin\alpha$, deoarece unghiurile α, $\alpha \pm 2\pi$ sînt determinate de aceeaşi semidreaptă. Aceasta înseamnă că numărul $T=2\pi$ este perioadă a funcției sinus. Să arătăm că $T=2\pi$ este ***perioadă principală*** a funcției sinus (perioada pozitivă minimă). Presupunînd că există o perioadă mai mică T_1, $T_1>0$, obținem $\sin x=\sin(x+T_1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. În particular, pentru $x=0$ avem $0=\sin 0=\sin T_1$. Întrucît numărul T_1 este un zero al funcției sinus, el are forma $T_1=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Unica valoare pozitivă de forma $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, mai mică decît 2π, este $T_1=\pi$. Dacă π ar fi perioadă, am obține $\sin x=\sin(x+\pi)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Această relație nu este însă adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$. De exemplu, pentru $x=\frac{\pi}{2}$ avem $\sin\frac{\pi}{2}=1$ şi $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1$. Rezultă că π nu este perioadă. Astfel, perioada principală a funcției sinus este 2π.

Observație. În baza proprietăților funcțiilor periodice, conchidem că este suficient să studiem proprietățile, variația funcției sinus pe orice interval de lungime 2π.

5° ***Semnul*** funcției sinus coincide cu semnul ordonatei punctului respectiv al cercului trigonometric. Dacă $\alpha\in(2\pi k, \pi+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, adică unghiul α aparține cadranului I sau II, atunci funcția sinus ia valori pozitive (fig. 8.8 a)). Dacă $\alpha\in(2\pi k-\pi, 2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, adică unghiul α aparține cadranului III sau IV, atunci funcția sinus ia valori negative (fig. 8.8 a)).

6° ***Paritatea***. Dacă semidreapta $[OM$ determină un unghi α, iar semidreapta $[OM'$ determină unghiul $-\alpha$ (fig. 8.8 b)), atunci punctele M, M', ce aparțin cercului trigonometric, sînt simetrice față de axa Ox. În acest caz, se obține

$$\sin(-\alpha)=y_{M'}=-y_M=-\sin\alpha,$$

pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția sinus este o funcție impară.

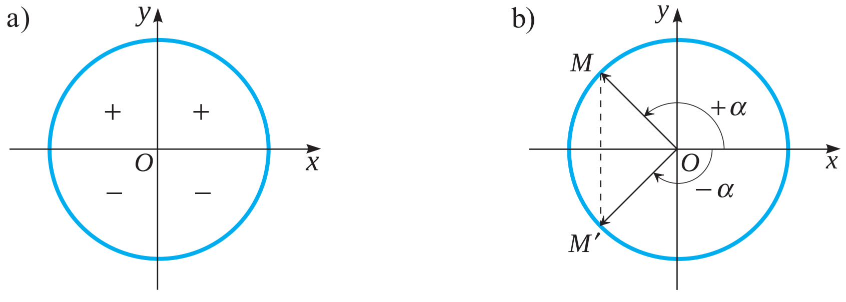


Fig. 8.8

7° ***Monotonia***. În § 2 se va arăta că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, cu valori de la –1 pînă la 1, şi strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, cu valori de la 1 pînă la –1.

8° ***Extremele***. În baza monotoniei funcţiei sinus, punctele $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, sînt puncte de maxim local ale acesteia şi $y_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1$, iar punctele $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, sînt punctele ei de minim local şi $y_{\min}=f\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-1$.

9° ***Graficul*** funcţiei sinus pe $[0, 2\pi]$ se construieşte mai uşor dacă se foloseşte cercul trigonometric. Pentru a obţine, geometric, valorile aproximative ale funcţiei sinus (fig. 8.9), se va ţine cont că $2\pi\approx 6{,}28$.

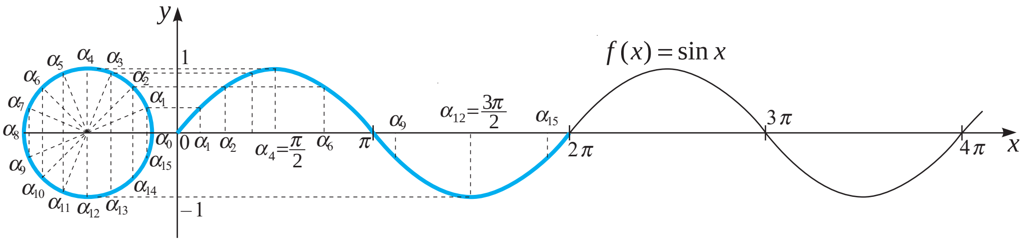


Fig. 8.9

Pe intervalele $[2\pi, 4\pi]$, $[-2\pi, 0]$, … graficul funcţiei sinus se obţine în baza periodicităţii funcţiei sinus, repetînd comportarea acesteia pe $[0, 2\pi]$.

II. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$

Proprietăţile funcţiei cosinus se obţin în mod analog cu proprietăţile funcţiei sinus.

1° $D(\cos)=\mathbb{R}$.

2° $E(\cos)=[-1, 1]$.

3° Zerourile funcţiei cosinus sînt numerele $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, iar graficul ei intersectează axa Oy în punctul $(0, 1)$.

4° Funcţia cosinus este periodică, cu perioada principală 2π.

5° Semnele valorilor funcţiei cosinus coincid cu semnele absciselor punctelor cercului trigonometric: valorile funcţiei cosinus sînt pozitive, dacă unghiul α aparţine cadranului IV sau I $\left(\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}\right)$, şi negative, dacă unghiul α aparţine cadranului II sau III $\left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}\right)$.

6° Funcţia cosinus este pară, deoarece dacă semidreptele $[OM$ şi $[OM'$ determină, respectiv, unghiurile α şi $-\alpha$, atunci punctele M, M' ale cercului trigonometric sînt simetrice faţă de axa Ox şi au aceeaşi abscisă. Deci, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

7° Funcţia cosinus este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $[\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$ (cadranele III, IV), cu valori de la -1 la 1, şi strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $[2\pi k, \pi+2\pi k]$, $k\in\mathbb{Z}$ (cadranele I, II), cu valori de la 1 pînă la -1.

8° Pentru funcţia cosinus, punctele $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, sînt puncte de maxim local şi $y_{\max}=f(2\pi k)=1$, iar punctele $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, sînt puncte de minim local şi $y_{\min}=f(\pi+2\pi k)=-1$.

9° O porţiune a graficului funcţiei cosinus este reprezentată în figura 8.10.

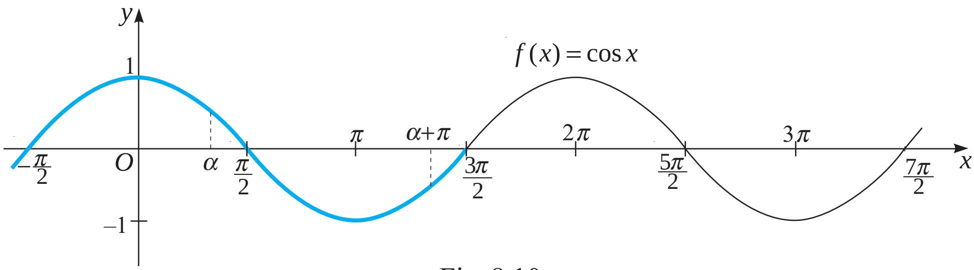


Fig. 8.10

III. Funcţia $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{tg } x$

1° $D(\text{tg})=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2° $E(\text{tg}) = \mathbb{R}$. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un unghi α, astfel încît $\text{tg}\alpha = a$, deoarece $\text{tg}\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{AB}{OA}=\frac{a}{1}=a$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 8.11).

Ordonata punctului de intersecţie a semidreptei $[OM$ cu tangenta AB la cercul trigonometric în punctul $A(1,0)$ este $\text{tg}\alpha$, de aceea dreapta AB se numeşte ***dreapta tangentelor***.

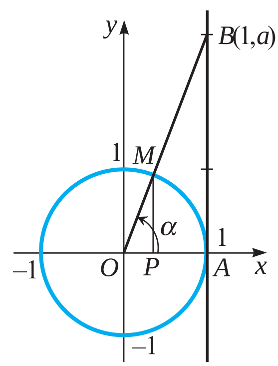


Fig. 8.11

3° Zerourile funcţiei tangentă coincid cu zerourile funcţiei sinus: $x\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

4° Cum pentru orice $\alpha\in D(\text{tg})$ avem $\text{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\text{tg}\alpha$, rezultă că funcţia tangentă este periodică. Se poate arăta că perioada principală a funcţiei tangentă este π.

5° Funcţia tangentă ia valori pozitive în cadranele I, III, unde funcţiile sinus şi cosinus iau valori de acelaşi semn, şi valori negative – în cadranele II, IV, unde funcţiile sinus şi cosinus iau valori de semne opuse.

6° Funcţia tangentă este impară, deoarece pentru orice $\alpha\in D(\text{tg})$ obţinem:

$$\text{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\text{tg}\alpha.$$

7° Funcţia tangentă este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ (fig. 8.12).

8° Funcţia tangentă nu are extreme.

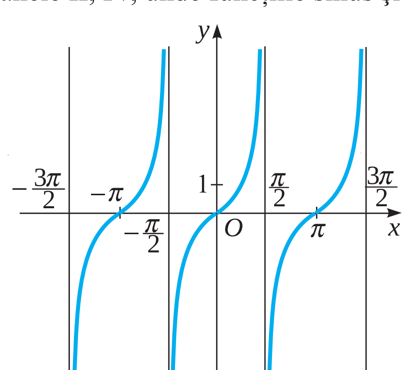


Fig. 8.12

9° O porțiune a graficului funcției tangentă este reprezentată în figura 8.12.

Observație. Dreptele $y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, sînt ***asimptote verticale*** ale graficului funcției $f(x)=\operatorname{tg}x$.

IV. Funcția $f: D\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x$

1° $D(\operatorname{ctg})=\mathbb{R}\setminus\{\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2° $E(\operatorname{ctg})=\mathbb{R}$ (fig. 8.13). Abscisa punctului $B(a,1)$ este $\operatorname{ctg}\alpha$, adică $a=\operatorname{ctg}\alpha$, de aceea dreapta AB se numeşte ***dreapta cotangentelor***.

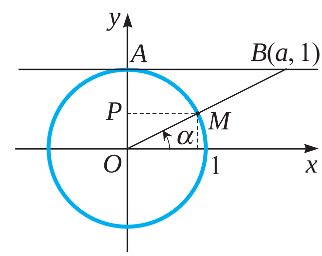


Fig. 8.13

3° Zerourile funcției cotangentă sînt numerele
$$x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

4° Perioada principală a funcției cotangentă este π.

5° Funcția cotangentă ia valori pozitive în cadranele I, III şi negative – în cadranele II, IV.

6° Funcția cotangentă este impară:
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x,\ x\in D(\operatorname{ctg}).$$

7° Funcția cotangentă este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(\pi k,\ \pi+\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$ (fig. 8.14).

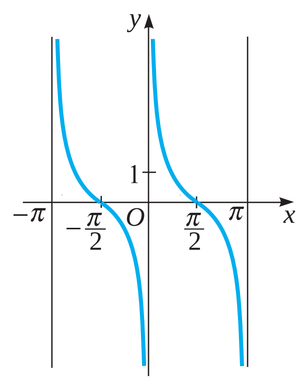


Fig. 8.14

8° Funcția cotangentă nu are extreme.

9° O porțiune a graficului funcției cotangentă este reprezentată în figura 8.14.

Următoarele exemple se rezolvă aplicînd proprietățile funcțiilor trigonometrice.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine semnul produsului $a=\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

Rezolvare:

Constatăm că unghiurile de $\frac{2\pi}{5}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad aparțin cadranului I, unghiul de $\frac{2\pi}{3}$ rad – cadranului II, unghiul de $\frac{4\pi}{3}$ rad – cadranului III, unghiul de $\frac{5\pi}{3}$ rad – cadranului IV. Cum $\cos\frac{2\pi}{5}>0,\ \sin\frac{2\pi}{3}>0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}>0,\ \cos\frac{4\pi}{3}<0,\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}<0$, rezultă că valoarea expresiei a este un număr pozitiv.

2. Să se determine semnul valorii expresiei $\dfrac{\cos 10^\circ - \cos 9^\circ}{2 - \sin 2}$.

Rezolvare:

Cum $0^\circ < 9^\circ < 10^\circ < 180^\circ$, iar funcția cosinus pe $[0^\circ, 180^\circ]$ este strict descrescătoare, rezultă: $\cos 9^\circ > \cos 10^\circ$. Deci, $\cos 10^\circ - \cos 9^\circ < 0$, adică numărătorul este negativ. Valoarea expresiei de la numitor este pozitivă, deoarece $\sin 2 < 1$. Prin urmare, valoarea expresiei inițiale este un număr negativ.

1.4. Identitățile fundamentale ale trigonometriei

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ punctul respectiv pe cercul trigonometric. Cum coordonatele originii sînt (0,0), pentru lungimea segmentului OM (raza cercului trigonometric) se obține:

$$1 = \sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Astfel, am obținut ***identitatea fundamentală a trigonometriei***:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.} \qquad (3)$$

Înmulțind expresiile din definițiile funcțiilor tangentă şi cotangentă, obținem:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ \text{sau} \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \ \text{sau} \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

Împărțind ambii membri ai identității (3) la $\sin^2\alpha$, apoi la $\cos^2\alpha$, obținem:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ \alpha \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

Exerciții şi probleme propuse

A

1. Să se exprime în radiani măsura unghiului:

a) 45°, 20°, 110°; b) 60°, –78°, 270°;

c) –120°, –31°, 180°; d) 150°, –218°, –90°.

2. Să se exprime în grade măsura unghiului:

a) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, -2\pi$;

c) $\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}$.

3. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $\sin 90^\circ + \cos 270^\circ - \sin^2 15^\circ$; b) $\operatorname{tg}\pi - \cos^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

c) $5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin 2\pi$; d) $-4\sin\frac{3\pi}{2} + 0{,}5\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

4. Este posibil ca sinusul şi cosinusul unuia şi aceluiaşi unghi să fie egale respectiv cu:

a) $\frac{1}{2}$ şi $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{7}{25}$ şi $-\frac{24}{25}$; c) 0,3 şi 0,9; d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ şi $-\frac{1}{\sqrt{3}}$?

5. Este posibil ca tangenta şi cotangenta unuia şi aceluiaşi unghi să fie egale respectiv cu:

a) $\frac{2}{3}$ şi $-\frac{3}{2}$; b) $-\frac{3}{7}$ şi $-\frac{7}{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $\sqrt{5}-2$ şi $\sqrt{5}+2$?

6. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

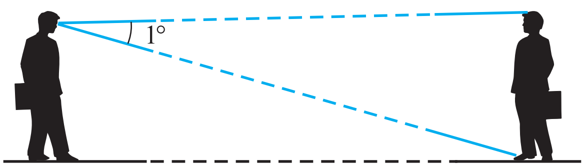
a) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$; b) $\sin\alpha-\sin^3\alpha-\cos\alpha+\cos^3\alpha$;

c) $\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{4}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-5$; d) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

7. Să se afle lungimea ipotenuzei şi măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic care are catetele de: a) 4 cm şi $4\sqrt{3}$ cm; b) 1 cm şi $\sqrt{3}$ cm.

8. Să se afle măsurile unghiurilor rombului cu latura de 2 cm şi înălţimea de $\sqrt{2}$ cm.

9. Care este distanţa dintre doi oameni de înălţimea 1,7 m, dacă unul îl vede pe celălalt sub un unghi de 1°?



B

10. Să se determine domeniul de definiţie al funcţiei $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; b) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}$; c) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

11. Să se determine semnul produsului $\cos110°\sin\frac{5\pi}{3}\cos(-10°)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

12. Fie funcţia $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Să se calculeze:

a) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; b) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; c) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; d) $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

13. Folosind monotonia funcţiilor trigonometrice, să se determine semnul valorii expresiei:

a) $\frac{\operatorname{tg}100°-\operatorname{tg}160°}{\sin(-10°)-\sin(-20°)}$; b) $\frac{\operatorname{tg}111°-\operatorname{tg}105°}{\sin15°-\cos10°}$; c) $\frac{\sin1-\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{tg}2}$.

14. Să se determine paritatea funcţiei definite prin formula:

a) $f(x)=\sin x+\cos x$; b) $f(x)=\sin^2 x+2$; c) $f(x)=\sin2x+\sin^3 x$.

15*. Să se afle mulţimea valorilor funcţiei definite prin formula:

a) $f(x)=3\cos x$; b) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; c) $f(x)=\frac{4}{\cos x}$.

16*. Să se reprezinte grafic funcţia definită prin formula:

a) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; b) $f(x)=3\sin2x$; c) $f(x)=|\cos x|$; d) $f(x)=\frac{1}{2}|\sin x|$.

§ 2 Transformări ale expresiilor trigonometrice

2.1. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri

a) Fie $\alpha \geq \beta,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, $m(\angle AOM_2) = \beta,\ m(\angle AOM_1) = \alpha$, unde $A(1, 0)$, $M_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $M_2(\cos\beta, \sin\beta)$ sînt puncte de pe cercul trigonometric (fig. 8.15).

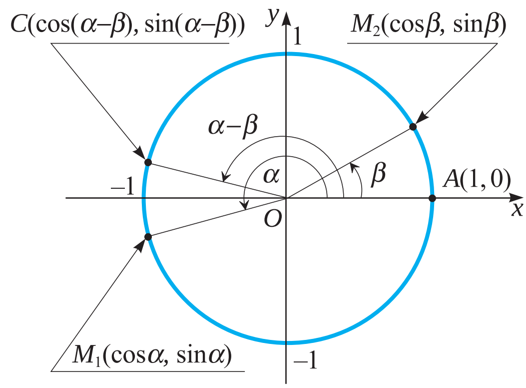


Fig. 8.15

Să calculăm $\cos(\alpha - \beta)$. Fie C un punct pe cercul trigonometric, astfel încît $l_{\smile AM_2C} = l_{\smile ACM_1} - l_{\smile AM_2}$. Aceasta înseamnă că $m(\angle AOC) = \alpha - \beta$.

Cum arcele AM_2C și M_2CM_1 au aceeași măsură, rezultă că și coardele ce le subîntind sînt congruente, adică $AC = M_1M_2$. Ținînd seama de coordonatele punctelor $A(1, 0)$, $M_2(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$, $M_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ și aplicînd formula distanței dintre două puncte, obținem:

$$AC^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta); \qquad (1)$$

$$M_1M_2^{\ 2} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha -$$
$$- 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \qquad (2)$$

Din (1) și (2) obținem: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. (3)

b) Fie $\beta > \alpha,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Cum funcția cosinus este pară, rezultă că $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)$. Aplicînd formula (3), obținem:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Se știe că orice numere reale $\alpha^*,\ \beta^*$ (care sînt măsurile unor unghiuri în radiani) pot fi scrise sub forma $\alpha^* = \alpha + 2k\pi,\ \beta^* = \beta + 2n\pi,\ k, n \in \mathbb{Z}$, unde $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Astfel, pentru orice numere reale α, β, ținînd cont de periodicitatea funcțiilor sinus, cosinus, obținem formula:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \qquad (4)$$

Deoarece $\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, luînd în considerație paritatea funcțiilor trigonometrice respective, obținem:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \qquad (5)$$

Exemple

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t = \sin t.$

② Substituind în formula din exemplul ① t cu $\frac{\pi}{2}-t$, obținem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)=\cos t.$$

Vom deduce formula pentru $\sin(\alpha-\beta)$, aplicînd formula (5) şi cea din exemplul ①:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Astfel, am obținut formula

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\ \text{pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \qquad (6)$$

Înlocuind în (6) β cu $-\beta$ şi aplicînd proprietățile funcțiilor trigonometrice, obținem (demonstrați!) următoarea formulă:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\ \text{pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \qquad (7)$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Rezolvare:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Similar se deduc formulele:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (8)$$

pentru orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, astfel încît există tangentele respective şi $1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$.

Exercițiu. Deduceți formulele (8), aplicînd formulele (4)–(7).

2.2. Formulele de reducere

Se ştie că orice unghi β măsurat în radiani poate fi scris sub forma $\beta=\frac{\pi}{2}k+\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$. Atunci, în baza formulelor din secvența 2.1, calculul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru un unghi arbitrar β poate fi redus la calculul valorilor lor pentru un unghi ascuțit α.

Exemple

① $\sin(\alpha+\pi)=\sin\alpha\cos\pi+\cos\alpha\sin\pi=-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha.$

② $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$

③ $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$

Observație. Funcția sin (funcția tg) se numeşte ***cofuncție*** a funcției cos (funcției ctg) şi invers.

Pentru facilitarea calculului valorilor funcțiilor trigonometrice, pot fi aplicate două reguli, numite ***reguli (formule) de reducere***:

1) valoarea oricărei funcții trigonometrice de unghiul $\beta=\frac{\pi}{2}k\pm\alpha,\ k\in\mathbb{Z}$, este egală cu valoarea funcției trigonometrice de acelaşi nume de unghiul α pentru k număr par şi este egală cu valoarea cofuncției trigonometrice corespunzătoare de unghiul α pentru k număr impar;
2) semnul rezultatului coincide cu semnul valorii funcției trigonometrice inițiale, ținînd cont de cadranul în care se află unghiul $\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$ şi considerînd că $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (indiferent de măsura unghiului α).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\sin 1020°$.

Rezolvare:

$\sin 1020°=\sin(90°\cdot 11+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deoarece $k=11$ este număr impar şi 1020° aparține cadranului IV, unde valoarea funcției sinus este număr negativ.

2.3. Formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi

Considerînd $\beta=\alpha$ în formulele (5) şi (7), obținem:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \tag{9}$$

numite ***formule ale cosinusului şi sinusului unghiului dublu***.

Considerînd $\beta=\alpha$ în prima dintre formulele (8) şi tgα, tg2α definite, obținem următoarea formulă pentru tangenta de unghi dublu:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{2},\quad \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{4},\quad n\in\mathbb{Z}.} \tag{10}$$

Pentru funcțiile trigonometrice de unghi triplu avem formulele:

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.} \tag{11}$$

Exercițiu. Deduceți formulele (10) și (11).

Vom deduce două formule, numite ***formule de micșorare a puterii funcțiilor trigonometrice***:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \qquad \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \qquad \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad (12)$$

Aplicînd formulele (12), putem micșora puterile cu exponent par ale funcțiilor trigonometrice, reducîndu-le la cele de ordinul I.

Exemplu

$$\cos^2\frac{\pi}{24} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

2.4. Formulele de transformare a sumelor în produse

Avem $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$

$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Deci, $\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \text{ pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$

Similar,

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ &\text{pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \end{aligned}} \qquad (13)$$

Exercițiu. Deduceți formulele (13).

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.

Rezolvare:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sqrt{2}\sin x.$$

Formulele (13) au o aplicație importantă la demonstrarea monotoniei funcțiilor trigonometrice (a se vedea § 1).

Fie $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$. Pentru diferența $A = \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1$ se obține $A = 2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Cum $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} > 0$, $\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > 0$, $A > 0$. Prin urmare, $\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$ și funcția sinus pe intervalul indicat este strict crescătoare.

În mod analog poate fi demonstrată monotonia funcțiilor cosinus, tangentă, cotangentă (enunțată în § 1). (Demonstrați!)

Exerciții și probleme propuse

A

1. Să se calculeze:

a) $3\cos 0° - 2\sin\frac{\pi}{2} + 6\operatorname{tg}\pi$;
b) $\sin 270° + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 90° - 2\cos 0°$;
c) $\operatorname{tg} 60° \cos 60° - 4\sin 90° \cos 45°$;
d) $\cos 60° + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 30° \cdot \sin 30°$.

2. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $E = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi$;
b) $E = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

3. Să se determine $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, dacă:

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
b) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$ și α aparține cadranului I;
c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
d) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Să se calculeze:

a) $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, știind că $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, și $\sin\beta = \frac{3}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\beta$, știind că $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, și $\cos\beta = \frac{1}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Să se calculeze:

a) $\sin 50° \cos 40° + \cos 50° \sin 40°$;
b) $\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{10}$;
c) $\sin 110° \cos 70° - \cos 110° \sin(-70°)$;
d) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{10}$.

6. Să se determine dacă există un unghi α, astfel încît:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;
b) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\cos\alpha = \frac{8}{41}$;
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}25$;
d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$.

7. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$; b) $2\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}2\alpha$; c) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \mathrm{ctg}^2 2\alpha$;

d) $\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$; e) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; f) $\dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1}{\cos\alpha}$.

8. Utilizînd formulele de micşorare a puterii, să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha - \cos 2\alpha$; c) $\cos^2\alpha + \cos 2\alpha$.

B

9. Să se afle $\sin\alpha\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Să se afle $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, dacă $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2{,}5$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi n}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

11. Să se arate că, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

c) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$;

d) $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) = (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\beta - \cos\alpha)$.

12. Să se demonstreze identitatea:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; b) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

13. Să se demonstreze că:

a) $\sin^3\alpha(1+\mathrm{ctg}\alpha) - \sin\alpha = \cos\alpha - \cos^3\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha)$, dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi n}{2} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{2}{\mathrm{tg}\alpha}$, dacă $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}2\alpha}$, dacă $\alpha \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

d) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$, dacă $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

14. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\sin\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$, dacă $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ şi $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$; b) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$, dacă $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = 0{,}8$;

c) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, dacă $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$; d) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, ştiind că $\mathrm{tg}\alpha = 2$, $\mathrm{tg}\beta = -1$, $\mathrm{tg}\gamma = 1$.

15. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{\cos^4(\pi-\alpha)}{\cos^4\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 1}$; b) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha} + \sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}{\sqrt{\mathrm{ctg}\alpha} - \sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}$, dacă $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \ne \dfrac{\pi}{4}$.

16. Să se demonstreze identitatea:

a) $\sin 2\alpha \sin 2\beta = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \dfrac{2}{3}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$, unde α, β, γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi;

d) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$, unde α, β, γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi.

17. Să se arate că dacă:

a) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C,$ atunci ΔABC este dreptunghic;

b) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C,$ atunci ΔABC este dreptunghic sau isoscel;

c) $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2},$ atunci ΔABC este isoscel;

d) $\cos A + \cos B - \cos(A+B) = \frac{3}{2},$ atunci ΔABC este echilateral.

18. Să se afle înălțimea trapezului dreptunghic circumscris unui cerc, dacă măsura unghiului ascuțit al trapezului este a, iar perimetrul lui este P.

19. Să se compună:

a) o identitate trigonometrică;

b) o problemă de geometrie, a cărei rezolvare necesită aplicarea elementelor de trigonometrie.

20. Să se formuleze exemple din diverse domenii de aplicare a elementelor de trigonometrie.

§ 3 Ecuații trigonometrice

3.1. Funcții trigonometrice inverse

La transformarea expresiilor trigonometrice (a se vedea § 2) apar situații în care este necesar să se determine valoarea unei funcții trigonometrice fiind cunoscută valoarea altei funcții trigonometrice de același unghi sau de un multiplu (submultiplu) al său. Acest fapt (și multe altele) fac oportună problema de a determina unghiul fiind cunoscută valoarea unei funcții trigonometrice de acest unghi. Vom examina funcțiile trigonometrice numai pe domeniile unde ele sînt inversabile, deci anumite restricții ale acestora. Anume, vom examina funcțiile:

$$f_1\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ f_1(x) = \sin x; \quad f_2\colon [0, \pi] \to [-1, 1],\ f_2(x) = \cos x;$$

$$f_3\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \operatorname{tg} x; \quad f_4\colon (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Aceste funcții sînt inversabile. Inversele lor se notează respectiv cu arcsin, arccos, arctg, arcctg și se citesc „arcsinus”, „arccosinus”, „arctangentă”, „arccotangentă”.

Definiție. Funcțiile arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ g_1(x) = \arcsin x;$

arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi],\ g_2(x) = \arccos x;$

arctg: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ g_3(x) = \operatorname{arctg} x;$

arcctg: $\mathbb{R} \to (0, \pi),\ g_4(x) = \operatorname{arcctg} x,$

se numesc **funcții trigonometrice inverse**.

Aşadar, în baza definiţiei funcţiei inverse, obţinem:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (1)$$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ x \in [-1, 1],\ y \in [0, \pi]; \quad (2)$$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad (3)$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi). \quad (4)$$

Exemple

1. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, fiindcă $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deoarece $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ şi $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Pentru determinarea valorilor funcţiilor trigonometrice inverse se pot folosi tabelele de valori ale funcţiilor sinus, cosinus, tangentă, cotangentă pe intervalele respective, schimbînd rolurile valorilor argumentelor şi valorilor funcţiilor (tab. 2, 3).

Tabelul 2

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Tabelul 3

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Se poate demonstra că:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R};$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Din definiţia funcţiilor trigonometrice inverse şi din relaţiile (1)–(4) rezultă ***relaţiile*** (***identităţile***) (5)–(9):

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1, 1]; \quad \arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (5)$$

$$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1, 1]; \quad \arccos(\cos x) = x,\ x \in [0, \pi]. \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0, \pi). \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]; \\ &\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]; \\ &\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Exercițiu rezolvat

Să se afle domeniile de definiție ale funcțiilor $f, h: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(2x - 1)$, $h(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2x-2}$.

Rezolvare:

În baza definiției funcției arccosinus, avem $-1 \le 2x - 1 \le 1$, de unde $0 \le x \le 1$. Astfel, $D(f) = [0, 1]$. Argumentul funcției arccotangentă poate lua orice valoare reală, deci este suficient ca numitorul raportului $\dfrac{x-3}{2x-2}$ să nu ia valoarea 0. Astfel, $D(h) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Graficele funcțiilor trigonometrice inverse sînt simetrice graficelor funcțiilor trigonometrice respective f_1, f_2, f_3, f_4 de la începutul secvenței 3.1 față de bisectoarea cadranelor I și III. Graficele funcțiilor arcsin, arccos, arctg și arcctg sînt reprezentate în harta noțională „Funcții trigonometrice și proprietățile lor” a modulului.

3.2. Ecuații trigonometrice

Problemă. Aria suprafeței laterale a unei piramide triunghiulare regulate este de 2 ori mai mare decît aria bazei. Să se afle măsura unghiului CDB de la vîrful piramidei (fig. 8.16).

Rezolvare:

Fie $AB = a$, $m(\angle CDE) = \alpha$, unde $DE \perp BC$.

Avem $\mathcal{A}_b = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ și $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot DE$. Cum $CE = \dfrac{a}{2}$, din triunghiul CED $(m(\angle E) = 90°)$ obținem:

$\dfrac{DE}{CE} = \operatorname{ctg}\alpha$, $DE = CE \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. Deoarece $\mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}_b$, obținem $3a \cdot \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 2 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Astfel, problema s-a redus la rezolvarea ecuației

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, care este o *ecuație trigonometrică*.

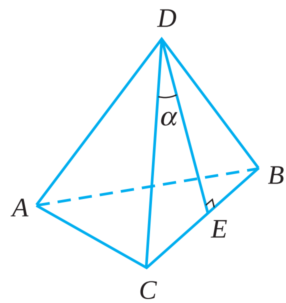


Fig. 8.16

Rezolvînd această ecuație (mai jos vom studia metoda ei de rezolvare) și luînd în considerație că $\angle CDE$ este ascuțit, obținem $m(\angle CDE) = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3} = 60°$.

Deci, $m(\angle CDB) = 2 \cdot m(\angle CDE) = 120°$. *Răspuns*: 120°.

Definiție. Ecuațiile care conțin necunoscuta (necunoscutele) numai la argumentul funcțiilor trigonometrice se numesc **ecuații trigonometrice**.

1 *Ecuații trigonometrice fundamentale*

Definiție. Ecuațiile trigonometrice de tipul $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, unde $a \in \mathbb{R}$, se numesc **ecuații trigonometrice fundamentale**.

Să determinăm formulele de calcul al soluțiilor ecuațiilor trigonometrice fundamentale. Sînt posibile două modalități de ilustrare a soluțiilor acestor ecuații:

1) folosind cercul trigonometric;

2) utilizînd graficele funcțiilor trigonometrice.

1 Ecuația $\sin x = a$

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Vom ilustra rezolvarea ecuației date folosind cercul trigonometric. Fie cercul trigonometric şi dreapta $y = a$ (fig. 8.17). Soluțiile ecuației $\sin x = a$ sînt măsurile unghiurilor (în radiani sau în grade) formate de semiaxa pozitivă $[Ox$ cu semidreptele ($[OM_1$, $[OM_2$ etc.) corespunzătoare punctelor pe cerc care au ordonata a. Deci, dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are soluții.

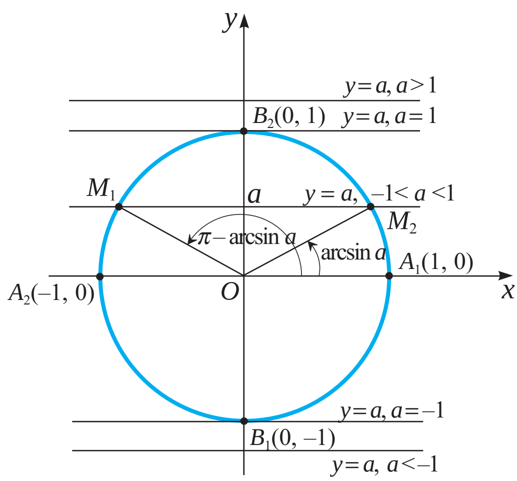


Fig. 8.17

Dacă $a = 1$, atunci unicul punct care are ordonata 1 (punctul de intersecție a cercului cu dreapta $y = 1$) este $B_2(0, 1)$. Prin urmare, o soluție particulară a ecuației $\sin x = 1$ este $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Ținînd cont de periodicitatea funcției sinus, obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (10)$$

Similar, pentru $a = -1$ (punctul $B_1(0, -1)$) obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = -1$:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (11)$$

Dacă $a = 0$, atunci pe cerc există punctele $A_1(1, 0)$ şi $A_2(-1, 0)$ cu ordonata 0. Astfel, soluții particulare ale ecuației $\sin x = 0$ sînt $x_1 = 0$ şi $x_2 = \pi$.

Luînd în considerație periodicitatea funcției sinus, obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = 0$: $x = 0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, sau reuniunea lor:

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$

Dacă $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, atunci dreapta $y = a$ intersectează cercul trigonometric (fig. 8.17) în două puncte, M_1 şi M_2, cu ordonata a. Aceste puncte sînt simetrice faţă de axa ordonatelor. Deci, soluţii particulare ale ecuaţiei $\sin x = a$ sînt $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$. În baza periodicităţii funcţiei sinus, obţinem formulele de calcul al tuturor soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$ pentru $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Aceste formule pot fi unite într-o singură formulă:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.} \tag{13}$$

Observăm că din (13), pentru $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$, obţinem, respectiv, soluţiile (10)–(12). Prin urmare, (13) este formula de calcul al tuturor soluţiilor ecuaţiei trigonometrice fundamentale $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$.

Astfel, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, este:

$$\boxed{S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare:

Aplicînd formula (13), obţinem:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \ \text{sau} \ x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Răspuns: $S = \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Observaţie. Ecuaţia $\sin x = a$, unde $a \in [-1, 1]$, are în mulţimea $\mathbb{R}$ o infinitate de soluţii. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = a$ (fig. 8.18).

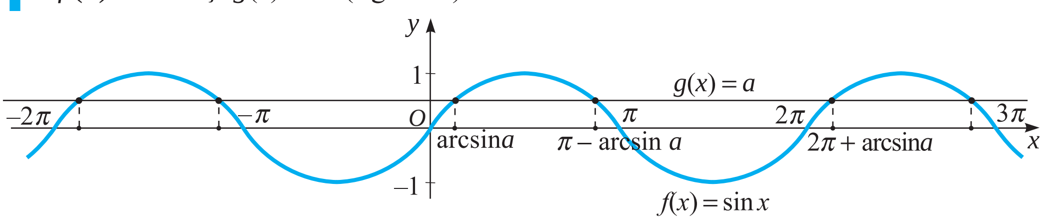


Fig. 8.18

Atenţie! La rezolvarea ecuaţiilor (inecuaţiilor) trigonometrice se va lua în consideraţie că $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

2 Ecuația $\cos x = a$

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie cercul trigonometric și dreapta $x = a$ (fig. 8.19).

Soluțiile ecuației $\cos x = a$ sînt măsurile unghiurilor formate de semiaxa pozitivă $[Ox$ cu semidreptele ($[ON_1$, $[ON_2$, $[OD_1$, $[OD_2$ etc.) corespunzătoare punctelor pe cerc care au abscisa a. Astfel, dacă $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are soluții.

Similar cu ecuația $\sin x = a$, utilizînd figura 8.19 și ținînd cont de periodicitatea funcției cosinus, obținem formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației fundamentale $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

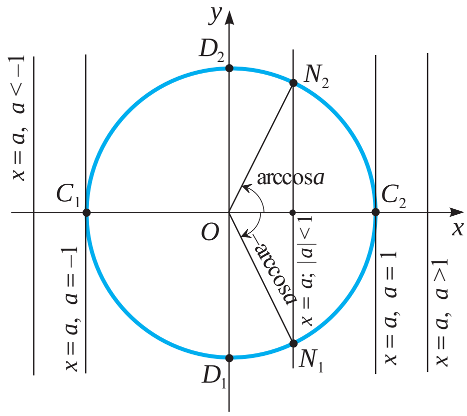


Fig. 8.19

Deci, mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, este:

$$\boxed{S = \{\pm\arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (14)$$

Exercițiu. Deduceți formula (14).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Conform formulei (14), obținem soluțiile:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

de unde $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Observație. Ecuația $\cos x = a$, unde $a \in [-1, 1]$, are în mulțimea $\mathbb{R}$ o infinitate de soluții. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = \cos x$ și $g(x) = a$ (fig. 8.20).

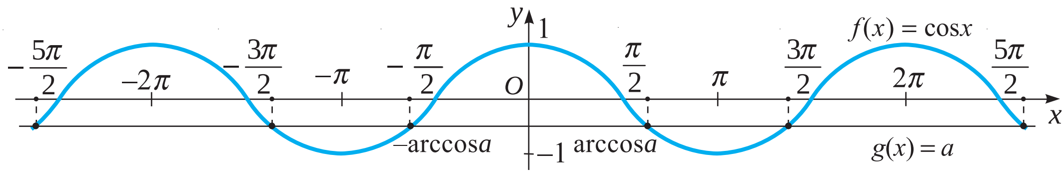


Fig. 8.20

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (inecuațiilor) trigonometrice se va ține cont de faptul că $\arccos a \in [0, \pi]$ și $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

3 Ecuația tg $x = a$

DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Cum $E(\text{tg}) = \mathbb{R}$, rezultă că ecuația tg $x = a$ are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Vom ilustra rezolvarea ecuației $\text{tg}\, x = a$ folosind cercul trigonometric și axa tangentelor A_1T (fig. 8.21). Pentru orice număr a, pe axa tangentelor este un unic punct $T(1, a)$, a cărui ordonată este a. Dreapta OT intersectează cercul trigonometric în două puncte (P și P_1). Deci, există două unghiuri α și $\pi + \alpha$ a căror tangentă este a, unde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\alpha = \text{arctg}\, a$.

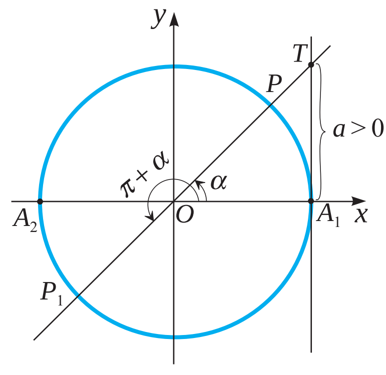


Fig. 8.21

Atunci, o soluție particulară a ecuației $\text{tg}\, x = a$ este $x_1 = \text{arctg}\, a$. Similar cu rezolvarea ecuațiilor $\sin x = a$, $\cos x = a$, utilizînd figura 8.21 și ținînd cont de periodicitatea funcției tangentă, obținem formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației fundamentale $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$:

$$x = \text{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $a = 0$ obținem formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației $\text{tg}\, x = 0$:

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, este:

$$\boxed{S = \{\text{arctg}\, a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (15)$$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Conform formulei (15), $x = \text{arctg}\,(-\sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\text{arctg}\,\sqrt{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, de unde $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Observație. Ecuația $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, are în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ o infinitate de soluții. Acest fapt este ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = \text{tg}\, x$ și $g(x) = a$ (fig. 8.22).

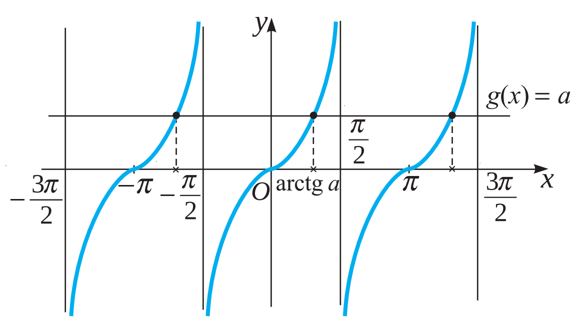


Fig. 8.22

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (inecuațiilor) trigonometrice se va lua în considerație că $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

4 Ecuația $\operatorname{ctg} x = a$

DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Cum $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$, rezultă că ecuația $\operatorname{ctg} x = a$ are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Vom ilustra rezolvarea ecuației $\operatorname{ctg} x = a$ folosind cercul trigonometric și axa cotangentelor A_1T (fig. 8.23).

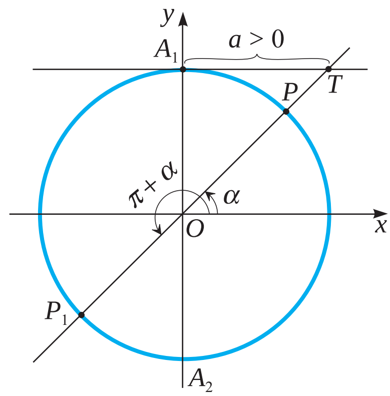


Fig. 8.23

Similar cu ecuația $\operatorname{tg} x = a$, pentru ecuația fundamentală $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, avem formula de calcul al tuturor soluțiilor ei:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $a = 0$ obținem formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Deci, mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, este:

$$\boxed{S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (16)$$

Exercițiu. Deduceți formula (16).

Observație. Ecuația $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f(x) = \operatorname{ctg} x$ cu dreapta $g(x) = a$. (Construiți!)

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (inecuațiilor) trigonometrice se va ține cont de faptul că $\operatorname{arcctg} a \in (0, \pi)$ și $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Conform formulei (16), $x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 *Ecuații trigonometrice de tipul f(sin x) = 0, f(cos x) = 0, f(tg x) = 0, f(ctg x) = 0*

Ecuațiile în care necunoscuta este argument numai al unei funcții trigonometrice se rezolvă, de regulă, prin ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare***, care reduce ecuația inițială la o ecuație care nu conține funcții trigonometrice.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos^2 x + 2\sin x + 2 = 0$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Cum $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, obținem ecuația echivalentă $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.

Fie $\sin x = t$, unde $|t| \le 1$. Atunci, din ultima ecuație obținem ecuația algebrică de gradul II $t^2 - 2t - 3 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Valoarea $t_2 = 3$ nu satisface condiția $|t| \le 1$. Revenind la necunoscuta x, obținem ecuația $\sin x = -1$, de unde $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3 *Ecuații trigonometrice omogene*

Definiție. Ecuațiile trigonometrice de forma

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0 \qquad (17)$$

se numesc **ecuații trigonometrice omogene de gradul *n*, $n \in \mathbb{N}^*$, în sin *x* și cos *x***.

Ecuațiile de forma (17) (dacă $a_n \ne 0$) se rezolvă prin împărțirea ambilor membri la $\cos^n x$ (la $\sin^n x$ pentru $a_0 \ne 0$), dacă $\cos x$ (respectiv $\sin x$) nu este factor comun.

Obținem ecuația echivalentă $a_n \mathrm{tg}^n x + a_{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_1 \mathrm{tg}\, x + a_0 = 0$, care, prin substituția $\mathrm{tg}\, x = t$, se reduce la ecuația algebrică $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0$.

Într-adevăr, dacă $a_n \ne 0$ $(a_0 \ne 0)$, atunci nu există un unghi φ pentru care $\cos\varphi = 0$ $(\sin\varphi = 0)$, deoarece, dacă ar exista un astfel de unghi, atunci, înlocuind în această ecuație x cu φ, am obține $a_n \sin^n \varphi = 0$ $(a_0 \cos^n \varphi = 0)$ sau $\sin\varphi = 0$ $(\cos\varphi = 0)$. Nu există însă un unghi pentru care funcția sinus și funcția cosinus să ia simultan valoarea 0. Așadar, la împărțirea ambilor membri ai ecuației (17) la $\cos^n x$ sau $\sin^n x$ obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos^2 x - \sin x \cos x + 4\sin^2 x = 2$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Substituind în ecuația dată $2 = 2 \cdot 1 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, obținem ecuația omogenă $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$. Împărțind ultima ecuație la $\cos^2 x$, obținem ecuația echivalentă $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.

Fie $\mathrm{tg}\, x = t$. Atunci obținem ecuația algebrică $t^2 + t - 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Revenind la necunoscuta x, obținem totalitatea de ecuații $\operatorname{tg} x=-2$; $\operatorname{tg} x=1$, cu soluțiile $S_1=\{-\operatorname{arctg}2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ și $S_2=\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Răspuns: $S=\{-\operatorname{arctg}2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Atenție! Dacă la rezolvarea ecuațiilor trigonometrice (mai ales a celor omogene) e posibilă aplicarea *metodei descompunerii în factori*, atunci mai întîi aplicăm această metodă, apoi folosim alte metode pentru rezolvarea ecuațiilor obținute. În caz contrar, putem pierde soluții chiar la prima etapă de rezolvare.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația omogenă $\cos^2 x-3\sin x\cos x=0$.

Rezolvare:

În membrul stîng, $\cos x$ este factor comun.

Rezolvînd această ecuație prin metoda descompunerii în factori, obținem ecuația $\cos x(\cos x-3\sin x)=0$, echivalentă cu totalitatea $\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x-3\sin x=0.\end{array}\right.$

Prima ecuație are mulțimea soluțiilor $S_1=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, iar ecuația a doua – mulțimea soluțiilor $S_2=\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Răspuns: $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+n\pi \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Observație. Dacă am fi împărțit ambii membri ai ecuației la $\cos^2 x$, am fi pierdut soluțiile ecuației inițiale de forma $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (soluțiile ecuației $\cos x=0$).

4 *Ecuații trigonometrice de forma* $a\sin x+b\cos x=c,\ a, b\in\mathbb{R}^*$

Vom examina cîteva metode de rezolvare a ecuațiilor de acest tip.

1 Metoda omogenizării

Cum $\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, iar $\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ și $1=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$, din $a\sin x+b\cos x=c$ obținem, în caz general, o ecuație omogenă:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2}-b\sin^2\frac{x}{2}-c\cos^2\frac{x}{2}-c\sin^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-c)\cos^2\frac{x}{2}+2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-(b+c)\sin^2\frac{x}{2}=0.$$

Dacă $b+c=0$, membrul stîng se descompune în factori şi se obţin două ecuaţii trigonometrice fundamentale.

Dacă $b+c\neq 0$, atunci, împărţind ambii membri ai ultimei ecuaţii la $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, obţinem ecuaţia echivalentă

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-(b-c)=0.$$

Fie $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Atunci obţinem ecuaţia $(b+c)t^2-2at-(b-c)=0$, care în condiţia $a^2+b^2\geq c^2$ are soluţiile

$$t_1=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},\quad t_2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Rezolvînd ecuaţiile $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_2$, obţinem soluţiile ecuaţiei iniţiale.

Observaţie. Ecuaţia de forma $a\sin x+b\cos x=c$ are soluţii dacă şi numai dacă $a^2+b^2\geq c^2$. Pentru $b=-c$ obţinem ecuaţia trigonometrică fundamentală de tipul $\operatorname{tg} t=a$, iar pentru $b=c$ vom aplica metoda descompunerii în factori. Pentru $c=0$ obţinem o ecuaţie trigonometrică omogenă de gradul I.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\sin x+3\cos x=1$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Omogenizăm această ecuaţie (ea are soluţii, deoarece $2^2+3^2>1^2$) şi obţinem: $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}-3\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2 x=0$. Împărţind ambii membri ai ultimei ecuaţii la $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, obţinem ecuaţia echivalentă $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0$. Fie $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Substituind, obţinem ecuaţia algebrică $2t^2-2t-1=0$, cu soluţiile $t_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $t_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Revenind la necunoscuta x, obţinem totalitatea de ecuaţii $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, respectiv cu mulţimile de soluţii:

$$S_1=\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{3}}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\},\quad S_2=\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2n\pi \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Răspuns: $S=\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{3}}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2n\pi \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}.$

2 Metoda unghiului auxiliar

Împărțind ambii membri ai ecuației $a\sin x + b\cos x = c$ (18) la a, $a \in \mathbb{R}^*$, obținem ecuația echivalentă $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$ (19).

Fie $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, unde $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Unghiul α se numeşte ***unghi auxiliar***.

Substituind $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$ în ecuația (19), obținem:

$$\sin x + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha.$$

Rezolvînd această ecuație fundamentală, obținem soluțiile ecuației (18).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Împărțind ambii membri ai ecuației inițiale la $\sqrt{3}$, obținem ecuația $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 1$. Avem $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Prin urmare, $\alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ecuația inițială devine $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3 Metoda reducerii la un sistem de ecuații algebrice

Avînd ecuația $a\sin x + b\cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, şi ştiind că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, efectuăm substituțiile $\sin x = u$, $\cos x = v$. Astfel, ecuația inițială se reduce la sistemul de ecuații algebrice $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ au + bv = c. \end{cases}$ Rezolvînd acest sistem şi revenind la substituțiile făcute, obținem soluțiile ecuației inițiale.

5 *Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cu selectarea soluțiilor*

Uneori se cere nu numai rezolvarea ecuației trigonometrice respective, dar şi selectarea soluțiilor care satisfac anumite condiții speciale: aparțin unui interval numeric, sînt soluții ale altor ecuații sau inecuații etc. Vom explica procedeul de selectare a soluțiilor printr-un exemplu.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x = 0$ şi să se determine soluțiile ei care aparțin intervalului $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie $\sin x + \cos x = t$. Atunci $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ şi ecuaţia iniţială se reduce la ecuaţia algebrică de gradul II $2t^2 - 3t - 2 = 0$, cu soluţiile $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Revenind la necunoscuta x, obţinem totalitatea de ecuaţii: $\sin x + \cos x = 2$; $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$. Prima ecuaţie nu are soluţii în $\mathbb{R}$.

Pentru a rezolva ecuaţia a doua, aplicăm metoda unghiului auxiliar şi obţinem ecuaţia $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, cu soluţiile $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru a determina soluţiile care aparţin intervalului $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, examinăm două cazuri:

1) Fie $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Avem $x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Cum $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $-\pi \le -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \le 2\pi n \le \frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Deci, $-\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \le n \le \frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Efectuînd calculele respective $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{\pi}{9}\right)$, conchidem că $n = 0$. Atunci $x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0 \Leftrightarrow x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$, adică numai o soluţie aparţine intervalului $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Fie $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Cum $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $-\pi \le \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Efectuînd calculele respective $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{\pi}{9}\right)$, conchidem că $n \in \varnothing$.

În ambele cazuri, reuniunea soluţiilor obţinute formează mulţimea soluţiilor ecuaţiei iniţiale, ce aparţin intervalului indicat.

Răspuns: $S = \left\{-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}\right\}$.

Observaţie. În acest exerciţiu am arătat cum se aplică ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare*** la rezolvarea unor ecuaţii de tipul $f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$.

Exerciții și probleme propuse

B

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

1. a) $\sin 2x=\sqrt{2}$; b) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$; d) $\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

2. a) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; b) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos 5x=\frac{\sqrt{5}}{2}$; d) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\frac{1}{2}$.

3. a) $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\operatorname{tg} 2x=25$; c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=1$; d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{5}\right)=\sqrt{3}$.

4. a) $\cos^2\frac{5x}{2}=\frac{1}{4}$; b) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg}^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=3$;

d) $1-\cos^2(3x-2)=\cos\frac{\pi}{3}$; e) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin 6x$; f) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\cos 3x$.

5. a) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; b) $\cos^2 x-5\cos x+6=0$;

c) $\operatorname{tg}^2 x-7\operatorname{tg} x+12=0$; d) $2\cos^2 5x+\sin 5x+1=0$.

6. a) $\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}=0$; b) $4\sin x-3\cos x=0$;

c) $\sin^2 x-3\cos^2 x=\sin 2x$; d) $4\sin^2 x+\sin 2x=3$.

7. a) $\cos x+\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2}$;

c) $5\sin x+\cos x=5$; d) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin 3x$.

8. a) $\cos 2x=\sin x-\cos x$; b) $\sin 2x=1-\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$;

c) $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=1$; d) $\sin^4 2x-\cos^4 2x=1$;

e) $\sin^3 x+\cos^3 x=1$; f*) $\sin x\sin 3x\cos 5x=1$;

g) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$; h) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$;

i) $\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{3}=\sqrt{2}\sin\frac{5x}{2}$; j) $\frac{1-\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x}=1-\sin 4x$.

9. Să se afle soluțiile reale ale ecuației trigonometrice, care aparțin intervalului indicat:

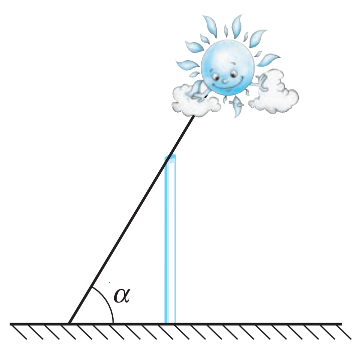
a) $1-\sin 2x+\sin x-\cos x=0,\ -\frac{3\pi}{4}\le x\le\pi$;

b*) $2\sin 5x\sin\frac{3}{2}x=\cos\frac{x}{2},\ x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$;

c) $\sin^2 x-3\sin x+2=0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$;

d) $2\cos^2 x-7\cos x+2=0,\ x\in(0,\pi)$.

10. Umbra unui stîlp vertical de 7 m are lungimea de 4 m. Să se exprime în grade înălțimea la care se află Soarele față de linia orizontului.



11. Un patrulater înscris într-un cerc are laturile de lungime $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2$ cm, $d = 8$ cm (în această ordine). Să se afle măsura unghiului format de laturile a şi b.

12. Valoarea raportului dintre aria laterală şi aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $\sqrt{2}$. Să se afle măsura unghiului format de muchia laterală şi înălţimea piramidei.

13. Diagonalele feţelor laterale ale unui paralelepiped dreptunghic formează cu laturile respective ale bazei unghiurile α şi β. Să se afle măsura unghiului format de diagonala paralelepipedului şi diagonala respectivă a bazei.

14. Se ştie că două laturi ale unui triunghi au lungimile l şi m, iar bisectoarea unghiului format de aceste laturi are lungimea b. Să se afle măsura acestui unghi.

15. Să se compună şi să se rezolve o ecuaţie trigonometrică:
a) omogenă; b) de forma $a\sin x + b\cos x = c,\ a, b \in \mathbb{R}^*$;
c) care se reduce la o ecuaţie algebrică.

16*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, unde a este un parametru real, ecuaţia:
a) $a\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; b) $(a+1)\sin^2 x - 2\sin x + a - 1 = 0$;
c) $(2a+1)\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 2x - a = 0$; d) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 3a - 1$.

§ 4 Inecuaţii trigonometrice

4.1. Noţiunea de inecuaţie trigonometrică

Definiţie. Inecuaţiile care conţin necunoscuta numai la argumentul funcţiilor trigonometrice se numesc **inecuaţii trigonometrice**.

Inecuaţiile trigonometrice pot fi rezolvate aplicînd atît proprietăţile funcţiilor trigonometrice (periodicitatea, monotonia, identităţile respective etc.), cît şi metodele generale de rezolvare a inecuaţiilor (inclusiv metoda intervalelor). Deoarece la rezolvarea inecuaţiilor trigonometrice verificarea soluţiilor este deseori dificilă, vom avea grijă ca transformările efectuate să fie transformări echivalente.

Rezolvarea inecuaţiilor trigonometrice se reduce, de regulă, la rezolvarea inecuaţiilor trigonometrice fundamentale sau la rezolvarea sistemelor (totalităţilor) de inecuaţii trigonometrice fundamentale.

4.2. Inecuaţii trigonometrice fundamentale

Definiţie. Inecuaţiile de tipul $\sin x > a,\ \sin x < a,\ \sin x \ge a,\ \sin x \le a,\ \cos x > a,$ $\cos x < a,\ \cos x \ge a,\ \cos x \le a,\ \operatorname{tg} x > a,\ \operatorname{tg} x < a,\ \operatorname{tg} x \ge a,\ \operatorname{tg} x \le a,\ \operatorname{ctg} x > a,$ $\operatorname{ctg} x < a,\ \operatorname{ctg} x \ge a,\ \operatorname{ctg} x \le a\ (a \in \mathbb{R})$ se numesc **inecuaţii trigonometrice fundamentale**.

Inecuaţiile trigonometrice fundamentale (similar cu ecuaţiile trigonometrice fundamentale) pot fi rezolvate:
1) folosind cercul trigonometric;
2) folosind graficele funcţiilor trigonometrice.

Vom ilustra rezolvarea inecuațiilor trigonometrice fundamentale pe cercul trigonometric.

Exercițiu rezolvat

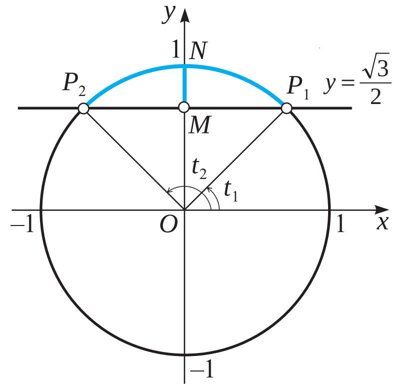


Fig. 8.24

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare:

DVA: $t \in \mathbb{R}$. Rezolvăm, mai întîi, inecuația pe intervalul $[0, 2\pi]$ de lungime 2π. Fie cercul trigonometric şi dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (fig. 8.24). Toate punctele cercului trigonometric corespunzătoare valorilor lui t $(t_1 < t < t_2)$, care satisfac inecuația inițială, au ordonata mai mare decît $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mulțimea acestor puncte formează arcul P_1P_2, subîntins de unghiul P_1OP_2. Extremității P_1 îi corespunde valoarea $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, iar extremității P_2 – valoarea $t_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Deci, punctul cercului va aparține arcului P_1P_2, dacă $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$. Rezultă că toate soluțiile inecuației inițiale, care aparțin intervalului $[0, 2\pi]$ de lungime 2π, sînt $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$.

Cum funcția sinus este o funcție periodică cu perioada principală 2π, toate celelalte soluții ale inecuației inițiale se obțin prin adunarea numerelor de forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la cele deja determinate. Astfel, soluțiile inecuației inițiale sînt: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

a1 Inecuația fundamentală $\mathbf{\sin} \boldsymbol{t > a}$ (1)

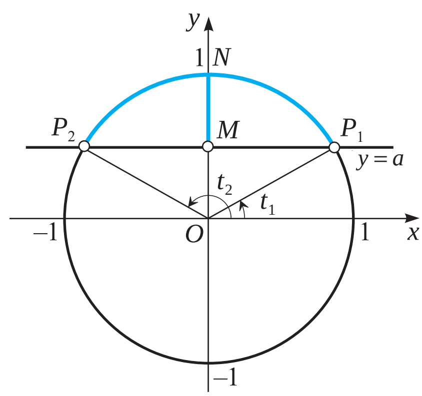


Fig. 8.25

1) Pentru $a \geq 1$ inecuația (1) nu are soluții.

2) Pentru $a < -1$ soluția inecuației este orice $t \in \mathbb{R}$.

3) Fie $-1 \leq a < 1$, $\alpha = \arcsin a$. Atunci, în baza periodicității funcției sinus, obținem soluțiile inecuației (1) (fig. 8.25):

$\arcsin a + 2\pi k < t < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aşadar, mulțimea soluțiilor inecuației (1) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi k, \ \pi - \arcsin a + 2\pi k).}$$

a2 Inecuația fundamentală $\mathbf{\sin} \boldsymbol{t < a}$ (2)

1) Pentru $a > 1$ inecuația (2) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.

2) Pentru $a \leq -1$ inecuația (2) nu are soluții.

3) Rezolvarea inecuației (2) pentru $-1 < a \le 1$ se reduce la rezolvarea inecuației $\sin t > a$, efectuînd substituția $t = -z$.

În acest caz, soluțiile inecuației (2) sînt: $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < t < \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor inecuației (2) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k).}$$

a3 Inecuația fundamentală $\mathbf{\sin t \ge a}$ (3)

1) Pentru $a \le -1$ inecuația (3) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a > 1$ inecuația (3) nu are soluții.
3) Pentru $-1 < a \le 1$ soluțiile inecuației (3) sînt:

$\arcsin a + 2\pi k \le t \le \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k].}$$

a4 Inecuația fundamentală $\mathbf{\sin t \le a}$ (4)

1) Pentru $a \ge 1$ inecuația (4) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a < -1$ inecuația (4) nu are soluții.
3) Pentru $-1 \le a < 1$ soluțiile inecuației (4) sînt (fig. 8.26):

$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le t \le \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k].}$$

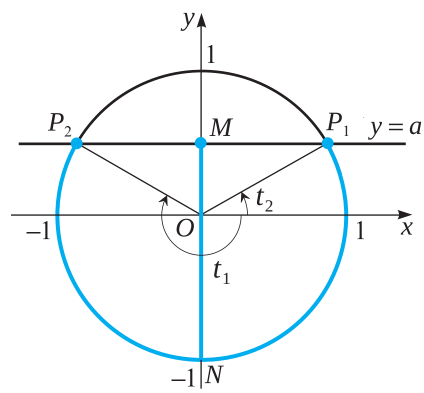


Fig. 8.26

Observație. La rezolvarea inecuațiilor trigonometrice fundamentale se caută soluțiile, mai întîi, pe un interval de lungime 2π (pentru sinus și cosinus) sau de lungime π (pentru tangentă și cotangentă). Răspunsul se va scrie ținîndu-se cont de periodicitatea funcției respective.

b1 Inecuația fundamentală $\mathbf{\cos t > a}$ (5)

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\cos t > \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

DVA: $t \in \mathbb{R}$. Rezolvăm inecuația pe intervalul $[-\pi, \pi]$ de lungime 2π. Fie cercul trigonometric și dreapta $x = \frac{1}{2}$ (fig. 8.27). Toate punctele cercului trigonometric pentru orice valoare a lui t care satisface inecuația inițială au abscisa mai mare decît $\frac{1}{2}$.

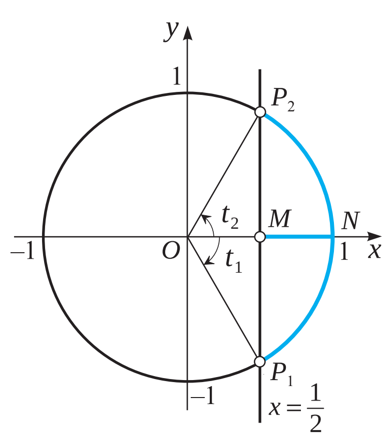


Fig. 8.27

Mulțimea acestor puncte formează arcul P_1P_2, subîntins de unghiul P_1OP_2.

Avem $P_1\left(\frac{1}{2}, -\arccos\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}, \arccos\frac{1}{2}\right)$.

Prin urmare, pe intervalul $[-\pi, \pi]$ punctul va aparține arcului P_1P_2, dacă $-\arccos\frac{1}{2} < t < \arccos\frac{1}{2}$, sau $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$. Rezultă că soluțiile inecuației inițiale, care aparțin intervalului $[-\pi, \pi]$ de lungime 2π, sînt $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$.

Deoarece funcția cosinus este o funcție periodică cu perioada principală 2π, toate celelalte soluții ale inecuației se obțin prin adunarea numerelor de forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la cele deja determinate. Deci, soluțiile inecuației inițiale sînt: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

Revenim la inecuația $\cos t > a$. Se poate demonstra că:

1) pentru $a \geq 1$ inecuația (5) nu are soluții;

2) pentru $a < -1$ inecuația (5) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$;

3) pentru $-1 \leq a < 1$ soluțiile inecuației (5) sînt (fig. 8.28): $-\arccos a + 2\pi k < t < \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, mulțimea soluțiilor inecuației (5) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos a + 2\pi k, \ \arccos a + 2\pi k).}$$

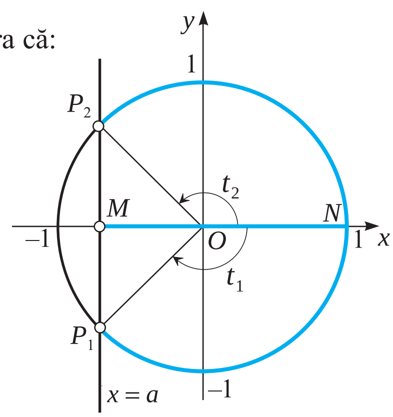


Fig. 8.28

b2 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\cos t < a}$ (6)

1) Pentru $a > 1$ inecuația (6) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.

2) Pentru $a \leq -1$ inecuația (6) nu are soluții.

3) Pentru $-1 < a \leq 1$ soluțiile inecuației (6) sînt: $\arccos a + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor fiind:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\arccos a + 2\pi k, \ 2\pi - \arccos a + 2\pi k).}$$

b3 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\cos t \geq a}$ (7)

1) Pentru $a \leq -1$ inecuația (7) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.

2) Pentru $a > 1$ inecuația (7) nu are soluții.

3) Pentru $-1 < a \leq 1$ soluțiile inecuației (7) sînt: $-\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar mulțimea soluțiilor este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\arccos a + 2\pi k, \ \arccos a + 2\pi k].}$$

b4 Inecuația fundamentală $\cos t \le a$ (8)

1) Pentru $a \ge 1$ inecuația (8) are soluție orice $t \in \mathbb{R}$.

2) Pentru $a < -1$ inecuația (8) nu are soluții.

3) Pentru $-1 \le a < 1$ soluțiile inecuației (8) sînt (fig. 8.29): $\arccos a + 2\pi k \le t \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k].}$$

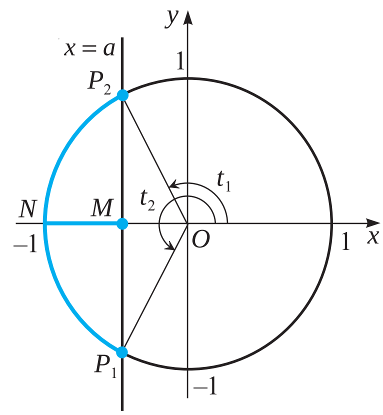


Fig. 8.29

c1 Inecuația fundamentală $\mathbf{tg}\,t > a,\ a \in \mathbb{R}$ (9)

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rezolvare:

DVA: $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Cum perioada principală a funcției tangentă este π și $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, vom determina soluțiile inecuației care aparțin intervalului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de lungime π.

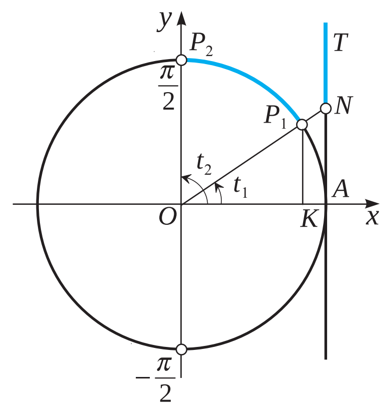


Fig. 8.30

Fie cercul trigonometric și axa tangentelor AT (fig. 8.30). Dacă valoarea lui t este soluție a inecuației inițiale, atunci ordonata punctului T, care este egală cu $\operatorname{tg} t$, trebuie să fie mai mare decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Mulțimea tuturor acestor puncte T formează semidreapta $(NT$. Toate punctele semicercului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, care corespund semidreptei $(NT$, formează arcul P_1P_2. Atunci $t_1 < t < t_2$ (atragem atenția că punctele P_1 și P_2 nu aparțin acestui arc).

Prin urmare, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\pi}{2}$, adică $\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2}$.

Ținînd cont de periodicitatea funcției tangentă, obținem soluțiile inecuației inițiale:

$$\frac{\pi}{6} + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

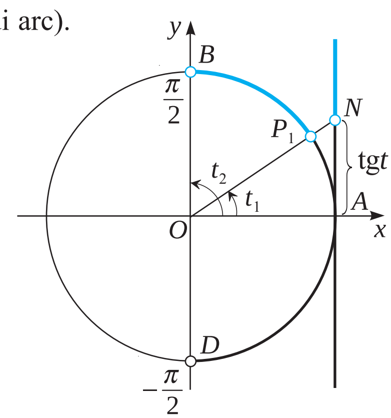


Fig. 8.31

Analizînd figura 8.31, observăm că punctul P_1 divizează arcul DAB în două părți: arcul P_1B și arcul DAP_1. Pe arcul P_1B (punctele P_1 și B se exclud) are loc inegalitatea $\operatorname{tg} t > a$. Astfel, soluțiile inecuației (9) sînt: $\operatorname{arctg} a + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right).}$$

c2 Inecuația fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t < a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ (10)

Pe arcul DAP_1 (fig. 8.31, punctele D și P_1 se exclud) are loc inegalitatea $\operatorname{tg} t < a$. Prin urmare, soluțiile inecuației (10) sînt: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t < \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k \right).} \quad (11)$$

c3 Inecuația fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t \geq a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$, are soluțiile: $\operatorname{arctg} a + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k \right).} \quad (12)$$

c4 Inecuația fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t \leq a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$, are soluțiile: $-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k \right].} \quad (13)$$

Exercițiu. Deduceți formulele (11)–(13).

d1 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{t > a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$, (fig. 8.32) are soluțiile:

$\pi k < t < \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k).} \quad (14)$$

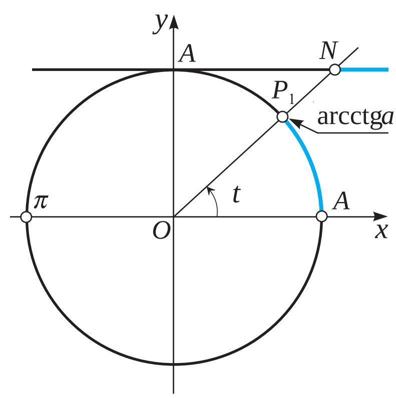


Fig. 8.32

d2 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{t < a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$, are soluțiile: $\operatorname{arcctg} a + \pi k < t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \quad (15)$$

d3 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{t \geq a},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$, are soluțiile:

$\pi k < t \leq \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k].} \quad (16)$$

d4 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\,t \le a,\ a \in \mathbb{R}$, are soluțiile:
$\operatorname{arcctg} a + \pi k \le t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \tag{17}$$

Exercițiu. Deduceți formulele (14)–(17).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie $x + \frac{\pi}{4} = t$. Atunci $|\sin t| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 t \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \cos 2t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2t \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 2t \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \pi k \le t \le \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Revenim la necunoscuta x: $-\frac{5\pi}{12} + \pi k \le x \le -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12} + \pi k,\ -\frac{\pi}{12} + \pi k\right]$.

Exerciții și probleme propuse

B

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\sin x < -2$; e) $\cos x < \frac{1}{2}$;

f) $\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) $\cos x \le 4$; i) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; j) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

k) $\operatorname{tg} x \ge -2$; l) $\operatorname{tg} x \le 1$; m) $\operatorname{ctg} x < 1$; n) $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$; o) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

p) $\operatorname{ctg} x > -3$; q) $2\cos^2 x + \cos x \le 0$; r) $\sin^2 x - 5\sin x \ge 0$; s) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$.

2. a) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos 3x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{ctg} 5x > -1$;

d) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < -\sqrt{3}$; e) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > -1$; f) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \le 0$.

3. a) $\sin x - \cos x < \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x \ge 1$; c) $\sin 5x + \cos 5x > -1$;

d) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; e*) $\cos 2x + |\cos x| > 0$; f*) $\sin^2 x - \cos^2 x < 3\sin x - 2$.

4. Să se determine soluțiile ecuației $2\cos 2x - 4\cos x - 1 = 0$ pentru care $|\sin x| \ge \frac{1}{2}$.

5. Să se determine soluțiile ecuației $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$, astfel încât $\cos x \ge -\frac{1}{2}$.

6. Să se compună o inecuație trigonometrică ce se rezolvă prin metoda substituției.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A

1. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos 180° + \cos^2 15°$; b) $\text{ctg}90° \cdot \sin\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{\pi}{6}$.

2. Să se afle $\cos 2\alpha$, dacă se ştie că: a) $\cos\alpha = 0{,}6$; b) $\sin\alpha = -0{,}4$.

3. Să se afle valoarea expresiei:

a) $\frac{3\cos(-57°)}{\sin(-33°)}$; b) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - \alpha)$.

4. O scară rezemată de un perete vertical formează cu acesta un unghi de 15°. Să se afle lungimea scării, dacă distanţa de la baza scării pînă la perete este de 1,2 m.

5. Pendulul de lungimea 20 cm al unui ceasornic oscilează şi unghiul format de două poziţii extreme este de 60°. Să se determine înălţimea la care ajunge capătul lui în raport cu poziţia pendulului în condiţia de echilibru stabil.

6. Să se ordoneze în mod crescător valorile: $\sin\frac{4\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\text{tg}\frac{\pi}{6}$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

7. Fie:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ şi $0° < \alpha < 90°$. Să se afle $\cos(90° + \alpha)$.

b) $\sin\alpha = 0{,}28$ şi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Să se afle $\sin 2\alpha$.

c) $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ şi $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Să se afle $\sin\alpha$.

d) $\text{tg}\alpha = 3$, $\text{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Să se afle $\text{tg}\beta$.

e) $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\text{tg}(\alpha + \beta) = 3$. Să se afle $\text{ctg}\beta$.

8. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $(\text{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + (\text{ctg}\alpha\sin\alpha)^2 - \cos^2\alpha$; b) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha$.

9. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $\frac{1}{(\text{tg}40°\text{tg}50°)^{-\frac{1}{3}}}$; b) $\frac{1}{(\text{tg}20°\text{tg}70°)^{-4}}$.

10. Un călător s-a apropiat de malul unui rîu. Pe malul celălalt, lîngă apă, creşte un copac. Din întîmplare, călătorul are la el un raportor.
a) Cum poate determina călătorul lăţimea rîului?
b) Cum ar proceda el dacă nu ar avea raportor?

11. O roată are 72 de zimţi. Să se exprime în grade unghiul de rotaţie pentru cazul de rotire a roţii cu: 1 zimţ, 30 de zimţi, 144 de zimţi, 300 de zimţi.

B

12. Fie vectorii nenuli $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$.
Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ este definit prin $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, însă se poate calcula şi astfel:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, unde α este măsura unghiului format de aceşti vectori.
a) Să se demonstreze că $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
b*) Să se demonstreze că:
1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$; 4) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.
c) Să se calculeze $\vec{a}\cdot\vec{b}$, dacă $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120°$.
d) Să se afle $\vec{a}\cdot\vec{b}$, dacă $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(-1, 5)$.

13. Fie $ABCD$ un romb avînd lungimea laturii egală cu 6, iar $m(\angle BAD)=60°$.
Să se afle produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{DB},\ \vec{b}=\overrightarrow{DC})$.

14. Fie $ABCD$ un pătrat avînd lungimea laturii egală cu 5.
Să se afle produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $(\vec{a}=\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=\overrightarrow{AB})$.

15. Fie vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $|\vec{a}|=2$ cm, $|\vec{b}|=3$ cm, iar $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=105°$. Să se determine numărul real k, astfel încît vectorul $\vec{a}+k\cdot\vec{b}$ să fie perpendicular pe vectorul $\vec{b}$.

16. Să se compare cu 1 valoarea expresiei $\sqrt{a}$, dacă $a=\cos110°\sin\frac{5\pi}{3}\cos10°$.

17. Să se determine, utilizînd proprietăţile funcţiilor trigonometrice, semnul valorii expresiei:
a) $\dfrac{\operatorname{ctg}10°+\operatorname{ctg}(-70°)}{\cos10°+\cos160°}$; b) $\dfrac{\cos1-\cos\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{ctg}2}$.

18. Să se studieze paritatea funcţiei $f: D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$; b) $f(x)=\sin3x-\operatorname{tg}x$.

19. Să se calculeze:
a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; c) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

20. Se ştie că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$. Să se afle: a) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

21. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) $\sin(287°-\alpha)\cos\alpha+\cos(287°-\alpha)\sin\alpha<0$.
b) $\cos(149°+\alpha)\cos\alpha+\sin(149°+\alpha)\sin\alpha>0$.

22. Să se calculeze, fără a aplica calculatorul de buzunar, $\sin17°+\cos253°+\operatorname{ctg}315°$.

23. Să se calculeze:
a) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, unde α, β, γ sînt măsurile unghiurilor interioare ale unui triunghi;
b) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, unde α, β, γ sînt măsurile unghiurilor interioare ale unui triunghi.

24. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, prin 6 metode, ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

25. Să se afle soluțiile ecuației $\log_{\frac{2}{3}} \sin x - 2\log_{\frac{2}{3}} \cos x = 1$, ce aparțin intervalului $[-350°, 2°]$.

26. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2$.

27. Să se demonstreze că $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$, unde α este măsura unui unghi ascuțit.

28. Să se demonstreze că $3\sin^2\alpha \geq 2\sin 2\alpha - 1$.

29. Să se reprezinte grafic funcțiile f și g și să se afle, utilizînd graficele, soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$, dacă:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 1 - x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x$.

30. Raza cercului înscris într-un triunghi isoscel este de 4 ori mai mică decît raza cercului circumscris acestui triunghi. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului.

31*. Unghiul alăturat bazei unui triunghi isoscel are măsura α.
a) Să se calculeze raportul m dintre aria triunghiului și suma pătratelor lungimilor laturilor acestuia.
b) Să se demonstreze identitatea $m = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{ctg}\alpha}$.
c) Să se afle α, astfel încît $m = \frac{1}{8}$.
d) Să se determine valorile lui α pentru care m ia cea mai mare valoare.
e) Să se afle mulțimea de valori ale raportului m.

32. Să se reprezinte grafic funcția $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$; b) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

33. Fie *ABCD* un patrulater în care $AB = BC$, $CD = 2AB$, $m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = 120°$.
a) Să se demonstreze că ΔABD este isoscel.
b) Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului *ADB*.
c) Să se demonstreze că punctele *A*, *M*, *N* sînt coliniare, unde *M* și *N* sînt mijloacele laturilor *BD* și respectiv *CD*.
d) Să se demonstreze că dreapta *CD* este tangentă cercului circumscris triunghiului *AMD*.
e) Să se afle aria patrulaterului *ABCD*, în funcție de $AB = a$.
f) Să se calculeze sinusul unghiurilor formate de dreptele *AC* și *BD*.

34*. Să se calculeze:
a) $\cos(\operatorname{arctg}(-3))$; b) $\sin(\arccos 0{,}6)$.

35*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|\sin x - 3\cos x| = 3\sin x + \cos x - 3$; b) $\log_3(2\sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0$.

36*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{5}\sin 2x - \sqrt{1 + 8\sin x\cos x} = 0$; b) $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0$.

Probă de evaluare

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. *Indicați litera care corespunde variantei corecte.* 1
Unghiul $\alpha = 272°$ este un unghi din cadranul
A I. **B** II. **C** III. **D** IV.

2. Calculați valoarea expresiei $\cos 60° + 2\sin 30° + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{ctg} 45°$. 1

3. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Știind că $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{2}{3}$, calculați: 3
$$\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \sin(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha-\beta),\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta),\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

4. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$. 2

5. Calculați valoarea expresiei $\left(\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$. 1

6. Lungimile laturilor unui paralelogram sînt de 5 cm și de 3 cm, iar înălțimea construită pe latura mai mare este de 2 cm. Calculați măsura unghiului ascuțit format de diagonalele paralelogramului. 2

Timp efectiv de lucru:
90 de minute

B

1. Determinați valoarea de adevăr a propoziției: 1
Dacă $\sin x + \cos x = a$, atunci $\sin^3 x + \cos^3 x = 1{,}5a^2 - 0{,}5a^3$.

2. Fie $\sin\alpha = 0{,}6$, $90° < \alpha < 180°$. Calculați $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{ctg} 2a$. 1

3. Demonstrați că ecuația $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$ nu are soluții în $\mathbb{R}$. 3

4. Determinați soluțiile ecuației $2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3\sin x$, care satisfac condiția $\cos 2x \geq 0$. 2

5. Fie funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-\operatorname{tg} 2x}$. Determinați valorile lui x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, pentru care funcția f este definită. 1

6. Demonstrați că pentru orice triunghi ABC are loc relația $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R}$, unde R este raza cercului circumscris acestui triunghi, iar r – raza cercului înscris în acest triunghi. 2

Arborele trigonometric

Identitățile trigonometrice fundamentale

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$

$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\mathrm{cosec}\,\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$

Formule de reducere

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha;\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha;\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

etc.

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$-$: $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$+$: $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\alpha=\beta$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin[\alpha-(-\beta)]=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$+$: $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\alpha=\beta$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\mathrm{tg}[\alpha+(-\beta)]$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\mathrm{ctg}[\alpha+(-\beta)]$

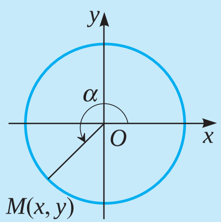
$\alpha=\beta$

$\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Funcții trigonometrice și proprietățile lor

Funcții trigonometrice



sin, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

tg: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$;

ctg: $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$;

$\cos\alpha = x$; $\sin\alpha = y$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$;

$\sec\alpha = \frac{1}{x}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y}$.

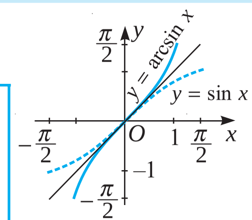
Funcții trigonometrice inverse

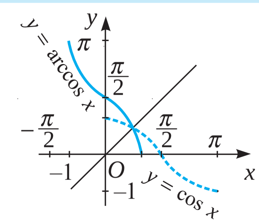
arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin a = t \Leftrightarrow \sin t = a$;

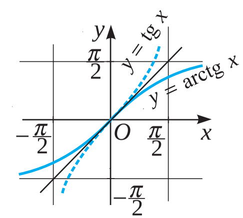
arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos a = t \Leftrightarrow \cos t = a$;

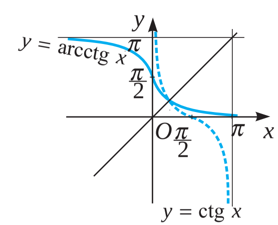
arctg: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = a$;

arcctg: $\mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{ctg} t = a$.









$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$;

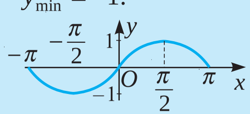
$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, $a \in [-1, 1]$;

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Proprietăți

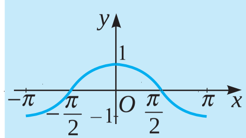
$f(x) = \sin x$

1° $\sin x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2° impară;
3° perioada: 2π;
4° crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$,
descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
5° $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
$y_{min} = -1$.



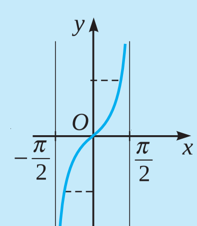
$f(x) = \cos x$

1° $\cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2° pară;
3° perioada: 2π;
4° crescătoare pe $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$,
descrescătoare pe $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;
5° $x_{max} = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
$y_{min} = -1$.



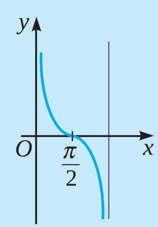
$f(x) = \operatorname{tg} x$

1° $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2° impară;
3° perioada: π;
4° crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
5° nu are extreme.



$f(x) = \operatorname{ctg} x$

1° $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;
2° impară;
3° perioada: π;
4° descrescătoare pe $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;
5° nu are extreme.



Ecuații, inecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice

Ecuații trigonometrice fundamentale

$\sin x = a, |a| \le 1;\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = a, |a| \le 1;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = a,\ a \in \mathbb{R};\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ctg} x = a,\ a \in \mathbb{R};\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Metoda substituției

$f(\sin x) = 0,\quad t = \sin x;\qquad f(\cos x) = 0,\quad t = \cos x;$

$f(\operatorname{tg} x) = 0,\quad t = \operatorname{tg} x;\qquad f(\operatorname{ctg} x) = 0,\quad t = \operatorname{ctg} x.$

omogene

$a_n \cos^n x + a_{n-1}\cos^{n-1} x \sin x + \ldots + a_1 \cos x \sin^{n-1} x + a_0 \sin^n x = 0 \,|\, : \cos^n x \ne 0$

$a\sin x + b\cos x = c$

1) metoda unghiului auxiliar:
$\sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a};$
2) metoda omogenizării;
3*) metoda aplicării formulelor substituției universale;
4) metoda reducerii la sistemul
$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$ unde $\begin{cases} u = \sin x, \\ v = \cos x. \end{cases}$

*$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \beta = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

*$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\beta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

*$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \beta \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$

Alte tipuri de ecuații trigonometrice

Inecuații trigonometrice

Inecuații trigonometrice fundamentale

Soluții:

$\sin x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\arcsin a + 2\pi n,\ \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(-\pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(-\arccos a + 2\pi n,\ \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\arccos a + 2\pi n,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\operatorname{tg} x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\operatorname{arctg} a + \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \operatorname{arctg} a + \pi n\right)$
$\operatorname{ctg} x > a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n,\ \operatorname{arcctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x < a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \pi + \pi n)$
$\sin x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\arcsin a + 2\pi n,\ \pi - \arcsin a + 2\pi n]$
$\sin x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \arcsin a + 2\pi n]$
$\cos x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\arccos a + 2\pi n,\ \arccos a + 2\pi n]$
$\cos x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\arccos a + 2\pi n,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$
$\operatorname{tg} x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\operatorname{arctg} a + \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$
$\operatorname{tg} x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \operatorname{arctg} a + \pi n\right]$
$\operatorname{ctg} x \ge a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n,\ \operatorname{arcctg} a + \pi n]$
$\operatorname{ctg} x \le a$	$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \pi + \pi n)$

*Reductibile la inecuații algebrice:

$f(\sin x) \ge 0,$
$f(\cos x) < 0,$
$f(\operatorname{tg} x) \ge 0,$
$f(\operatorname{ctg} x) \le 0$ etc.

Metoda substituției:

$t = \sin x$
($t = \cos x$ ș.a.)

Alte tipuri de inecuații trigonometrice

MODULUL 9

Figuri geometrice în plan

Geometria este o imensă grădină şi fiecare, intrînd în ea, îşi poate alege un buchet după placul său.

David Hilbert

Obiective

- identificarea şi utilizarea axiomelor, definiţiilor şi teoremelor specifice geometriei în plan;
- folosirea elementelor de geometrie în diverse contexte.

§ 1 Elemente de geometrie deductivă

În cursul gimnazial de geometrie aţi învăţat să distingeţi şi să definiţi principalele figuri geometrice din plan şi din spaţiu, să recunoaşteţi proprietăţile fundamentale ale acestor figuri în baza experienţei, prin construirea repetată, observarea atentă şi descrierea lor. Din aceste observaţii experimentale s-au dedus reguli şi s-au formulat definiţii, ca generalizări ale proprietăţilor observate. Aceasta este *metoda intuitivă* (*inductivă*) de studiere a geometriei.

În cele ce urmează vom aprofunda şi vom sistematiza aceste deprinderi, competenţe prin utilizarea, deopotrivă cu metoda intuitivă, a *metodei raţionale* (*deductive*) de studiere a geometriei.

Esenţa metodei raţionale de studiere a geometriei constă în faptul că proprietăţile figurilor geometrice sînt stabilite în virtutea unor raţionamente precise, care nu iau în consideraţie tot ce are în particular figura examinată, ci se bazează doar pe proprietăţile ei generale. Astfel, raţionamentul capătă un caracter universal, adică este valabil atît pentru figura cercetată, cît şi pentru toate figurile care posedă aceleaşi proprietăţi.

Faptul că proprietăţile figurilor geometrice nu pot fi argumentate doar în baza experienţelor rezultă şi din următoarele exemple.

1. Chiar dacă, intersectînd două drepte distincte paralele cu o mie de secante diferite, obţinem, prin verificări, că unghiurile alterne interne sînt congruente, mereu vom avea dubii că această proprietate este valabilă şi în cazul intersecţiei cu o următoare secantă.

2. Dacă vom construi o sută de triunghiuri diferite şi vom verifica, pentru ele, că suma mărimilor unghiurilor interioare este egală cu 180°, mereu va rămîne senzaţia că

această proprietate să nu fie adevărată pentru un următor triunghi, diferit de cele construite anterior.

3 Dacă vom construi mai multe triunghiuri dreptunghice, vom măsura lungimile laturilor lor şi ne vom convinge că suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei, nu avem nici un drept să afirmăm că această proprietate este adevărată pentru orice triunghi dreptunghic. Se cere o demonstraţie riguroasă.

Deci, un şir de exemple reuşite, chiar dacă ele sînt numeroase, nu poate servi drept bază pentru formularea unei proprietăţi generale.

Din contra, un singur exemplu, numit *contra-exemplu*, este suficient pentru a contrazice o afirmaţie generală!

Bunăoară, un elev a marcat pe o latură a unui unghi punctele B şi C, iar pe cealaltă latură – punctele D şi E, astfel încît $[BC]\equiv[DE]$ (fig. 9.1 a)). Şi imediat a tras concluzia că dreptele BD şi CE trebuie să fie paralele.

Colegul său n-a fost de acord cu el, construind un unghi de aceeaşi măsură, dar schimbînd poziţiile punctelor B şi C spre vîrful unghiului (fig. 9.1 b)). A obţinut un desen care contrazice afirmaţia primului elev.

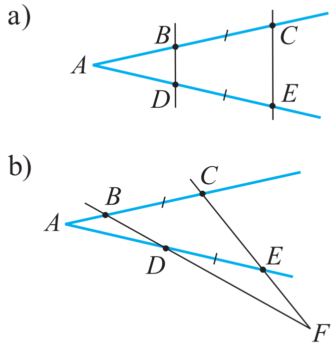


Fig. 9.1

Geometria este ştiinţa care studiază proprietăţile figurilor geometrice. Figurile geometrice sînt abstracţii ideale din realitatea fizică. Astfel, suprafaţa unui lac în repaos, suprafaţa unei table, a unei oglinzi sînt imitaţii aproximative şi grosolane ale figurii geometrice care se numeşte *plan*. De asemenea, gaura făcută de vîrful unui ac în hîrtie, urma lăsată de vîrful unui creion ascuţit pe hîrtie sînt reprezentări ale celei mai simple figuri geometrice, numită *punct*.

Figurile geometrice sînt mulţimi de puncte. Reuniunea şi intersecţia figurilor geometrice sînt figuri geometrice.

Limbajul teoriei mulţimilor este „adaptat” la necesităţile geometriei. Astfel, alături de exprimarea „punctul A aparţine dreptei d” se folosesc pe larg şi următoarele: „punctul A este situat pe dreapta d”, „dreapta d trece prin punctul A”, „punctul A este conţinut de dreapta d”. De asemenea, faptul că punctele A şi B determină dreapta AB sau determină segmentul AB poate fi exprimat şi prin îmbinările „dreapta AB trece prin punctele A şi B”, „dreapta AB uneşte punctele A şi B”, „segmentul AB uneşte punctele A şi B”.

Noţiunile fundamentale (care nu se definesc) ale geometriei sînt: *punct*, *dreaptă*, *plan* (ca mulţimi de puncte), *distanţă*, *măsură a unghiului*. Relaţiile fundamentale sînt: *de incidenţă*, *de ordine*, *de congruenţă* şi *de paralelism*.

Vom formula propoziţii ce exprimă relaţii între noţiunile fundamentale. Aceste propoziţii se consideră a priori adevărate şi se numesc ***axiome***. În ele sînt enunţate proprietăţi cunoscute ale figurilor geometrice, utilizate pe larg în clasele gimnaziale.

Sistemul de axiome folosit în acest manual este o variantă modificată a sistemului de axiome al lui Hilbert şi se clasifică în următoarele grupe:

1) axiome de incidenţă (**I**);
2) axiome de ordine (**O**);
3) axiome de măsurare (**M**) şi de construcţie (**C**) a segmentelor şi unghiurilor;
4) axioma de existenţă a unui triunghi congruent cu un triunghi dat (**PT**);
5) axioma paralelelor (**P**).

1 Axiome de incidenţă

I_1 Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una.
I_2 Oricare ar fi dreapta, există puncte ce-i aparţin şi puncte ce nu-i aparţin.

Dreapta se notează cu literele mici ale alfabetului latin (fig. 9.2 a)). Dacă A şi B sînt puncte distincte ce aparţin unei drepte, atunci dreapta poate fi notată AB (fig. 9.2 b)). În figura 9.2 c) punctele distincte A şi B aparţin dreptei a ($A \in a$, $B \in a$), iar punctele C şi D nu aparţin dreptei a ($C \notin a$, $D \notin a$).

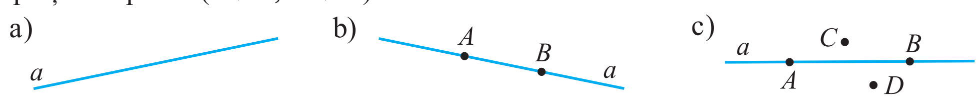


Fig. 9.2

2 Axiome de ordine

Axiomele de ordine pun în evidenţă relaţiile dintre punctele situate pe o dreaptă. Aceste relaţii se exprimă prin „a fi între" sau „a se afla între" etc.

O_1 Dintre trei puncte distincte ale unei drepte, unul şi numai unul se află între celelalte două.

Fie punctele A, B, C situate pe dreapta a (fig. 9.3). Propoziţiile 1)–4) sînt echivalente.

Fig. 9.3

1) Punctul C se află între punctele A şi B.
2) Punctul C este situat între A şi B.
3) Punctele A şi B se află de o parte şi de alta a punctului C.
4) Punctele A şi C sînt situate de aceeaşi parte a punctului B.

O_2 Oricare ar fi două puncte distincte, A şi B, pe dreapta determinată de ele, există cel puţin un punct C, astfel încît B se află între A şi C.

O_3 Orice dreaptă împarte mulţimea punctelor planului, ce nu aparţin dreptei, în două submulţimi disjuncte nevide de puncte, numite ***semiplane***, astfel încît segmentul determinat de două puncte oarecare din semiplane diferite intersectează dreapta (segmentul AC), iar segmentul determinat de două puncte distincte din acelaşi semiplan nu intersectează dreapta (segmentul AB) (fig. 9.4).

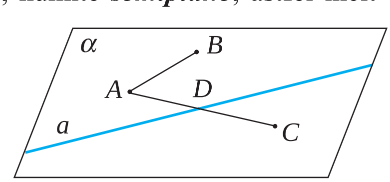


Fig. 9.4

3 Axiome de măsurare şi de construcţie a segmentelor şi unghiurilor

M_1 Fiecărui segment i se asociază un unic număr nenegativ, numit ***lungimea segmentului***. Lungimea unui segment este egală cu zero dacă şi numai dacă segmentul este nul. Lungimea unui segment este egală cu suma lungimilor segmentelor în care el este împărţit de orice punct interior al său.

Lungimea segmentului *AB* se notează *AB*.

Folosind diferite unităţi de măsură (metrul, centimetrul, kilometrul etc.), obţinem diferite valori numerice ale lungimii unui segment.

M_2 Fiecărui unghi i se asociază o singură măsură în grade, cuprinsă între 0° şi 180°. Unghiului alungit i se asociază 180°, iar unghiului nul i se asociază 0°. Măsura unui unghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor în care el este împărţit de orice semidreaptă cu originea în vîrful unghiului şi situată în interiorul lui.

C_1 Pentru orice număr real nenegativ *p*, pe o semidreaptă dată, există un unic punct care, împreună cu originea semidreptei, determină un segment de lungime *p*.

C_2 Pentru orice φ, $0° < \varphi < 180°$, în semiplanul dat, determinat de dreapta suport a oricărei semidrepte date, există un unic unghi de măsura φ, o latură a căruia este semidreapta dată.

4 Axioma de existenţă a unui triunghi congruent cu un triunghi dat

PT (**axioma de permutare congruentă a triunghiului**). Fie triunghiul *ABC* şi semidreapta $[A_1M$. Atunci, în semiplanul dat, determinat de dreapta A_1M, există un triunghi congruent cu triunghiul *ABC*, astfel încît un vîrf al acestui triunghi coincide cu A_1, al doilea vîrf, B_1, aparţine semidreptei $[A_1M$, iar al treilea vîrf, C_1, se află în semiplanul dat.

P (**axioma paralelelor**). Prin orice punct ce nu aparţine unei drepte trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Noţiunile noi în geometrie se introduc cu ajutorul *definiţiilor*.

Exemple

1. Dreapta care trece prin mijlocul unui segment şi este perpendiculară pe el se numeşte *mediatoare a segmentului*.

2. Segmentul care uneşte vîrful triunghiului cu mijlocul laturii opuse acestui vîrf se numeşte *mediană a triunghiului*.

3. Punctele care aparţin aceleiaşi drepte se numesc *puncte coliniare*. În caz contrar, punctele se numesc *necoliniare*.

Teoremele sînt proprietăţi importante care se demonstrează.

Majoritatea teoremelor din cursul de geometrie se formulează (sau pot fi formulate) sub forma: „Dacă I, atunci C”, unde I şi C sînt enunţuri care se numesc, respectiv, ***ipoteza*** şi ***concluzia*** teoremei (a se vedea modulul 2).

Ipoteza teoremei se numeşte ***condiţie suficientă*** pentru concluzie, iar concluzia se numeşte ***condiţie necesară*** pentru ipoteză.

Demonstraţia teoremei este o înlănţuire riguroasă de deducţii bazate pe axiome, teoreme sau pe proprietăţi deja demonstrate.

Exemplu

Să analizăm demonstraţia schematică a teoremei:

„Dacă figura ABC este un triunghi, atunci suma măsurilor unghiurilor interioare ale ΔABC este egală cu 180°”.

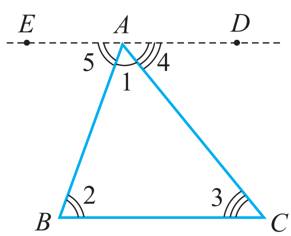


Fig. 9.5

Ducem $AD \parallel BC$ (fig. 9.5).

$S = \mathrm{m}(\angle 1) + \mathrm{m}(\angle 2) + \mathrm{m}(\angle 3)$,

$\angle 2 \equiv \angle 5$ (unghiuri alterne interne),

$\angle 3 \equiv \angle 4$ (unghiuri alterne interne),

deci $S = \mathrm{m}(\angle 1) + \mathrm{m}(\angle 4) + \mathrm{m}(\angle 5)$.

$\mathrm{m}(\angle 1) + \mathrm{m}(\angle 4) + \mathrm{m}(\angle 5) = 180°$,

deoarece $\angle EAD$ este alungit. Astfel, $S = 180°$.

La demonstraţie am aplicat teorema despre congruenţa unghiurilor alterne interne (teorema 2). Demonstraţia se bazează pe axioma paralelelor (**P**) şi pe axioma $\mathbf{M_2}$.

Sînt prezente implicit şi definiţii: definiţia paralelelor, a secantei, a unghiului, a triunghiului, a unghiurilor alterne interne.

De asemenea, sînt folosite implicit noţiunile nedefinite: „punct”, „dreaptă”, „egalitate”.

Se utilizează şi diferite operaţii logice.

Fie propoziţia: „Dacă I, atunci C” (1).

Schimbînd locurile ipotezei şi concluziei propoziţiei (1), obţinem o nouă propoziţie: „Dacă C, atunci I” (2).

Aceste două propoziţii pot fi:

1) ambele adevărate,
2) una adevărată şi alta falsă,
3) ambele false.

Dacă ambele propoziţii sînt adevărate, atunci ele sînt teoreme şi se numesc ***teoreme reciproce*** una pentru alta. De obicei, una din aceste teoreme se numeşte ***teoremă directă***, iar cealaltă se numeşte ***reciproca*** celei directe (a se vedea modulul 2).

Exemple

1. Reciproca teoremei „Dacă două coarde ale unui cerc sînt congruente, atunci ele sînt situate la distanţe egale de centrul cercului” este teorema „Dacă două coarde ale unui cerc sînt situate la distanţe egale de centrul cercului, atunci ele sînt congruente”.

2 Reciproca teoremei „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci diagonalele lui sînt congruente” este propoziția „Dacă diagonalele unui patrulater sînt congruente, atunci el este dreptunghi”, care este falsă.

În figura 9.6, $ABCD$ este patrulater cu diagonalele AC şi BD congruente, dar $ABCD$ nu este dreptunghi!

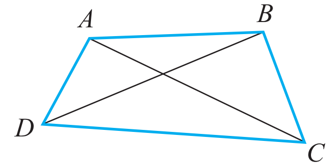


Fig. 9.6

3 Reciproca propoziției „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci laturile lui sînt congruente” este propoziția „Dacă laturile unui patrulater sînt congruente, atunci patrulaterul este dreptunghi”. Ambele propoziții sînt false.

Convenim ca enunțurile a două teoreme reciproce una pentru alta să fie formulate ca o singură teoremă, utilizînd îmbinările „condiție necesară şi suficientă” sau „dacă şi numai dacă”, sau „atunci şi numai atunci”.

Astfel, cele două teoreme reciproce din exemplul 1 pot fi enunțate împreună, zicînd: „Condiția necesară şi suficientă pentru ca două coarde ale unui cerc să fie congruente este ca ele să fie situate la aceeaşi distanță de centrul cercului” sau „Două coarde ale unui cerc sînt situate la aceeaşi distanță de centrul cercului dacă şi numai dacă ele sînt congruente”.

Propoziția „Diagonalele rombului sînt reciproc perpendiculare” este teoremă. Aceeaşi teoremă poate fi formulată astfel: „Dacă un paralelogram este romb, atunci diagonalele lui sînt reciproc perpendiculare”. Acum putem formula uşor reciproca ei: „Dacă diagonalele unui paralelogram sînt reciproc perpendiculare, atunci el este romb”. Aceasta este, de asemenea, teoremă.

Demonstrațiile teoremelor pot fi de tip *direct* sau de tip *indirect*, numite şi demonstrații prin ***reducere la absurd***. În astfel de demonstrații adevărul concluziei rezultă din falsitatea negației acesteia (a se vedea modulul 2).

Exemplu

Teoremă. Dacă două drepte sînt paralele, atunci orice dreaptă care o intersectează pe una o intersectează şi pe cealaltă.

Ipoteza. $a \parallel b,\ c \nparallel a,\ c \cap a = \{P\}$ (fig. 9.7).

Concluzia. $c \nparallel b$.

Demonstrație. Aplicăm metoda reducerii la absurd.

Dacă presupunem că $c \parallel b$, atunci prin punctul P trec două drepte distincte a şi c paralele cu dreapta b. Dar aceasta este absurd, deoarece contrazice axioma **P** a paralelelor. Prin urmare, cum c şi b nu pot fi paralele, ele trebuie să aibă un punct comun.

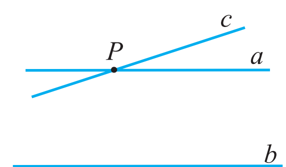


Fig. 9.7

Amintim clasificarea perechilor de unghiuri ce se obțin la intersecția a două drepte distincte cu o a treia dreaptă, numită ***secantă***.

Perechile de unghiuri (fig. 9.8):

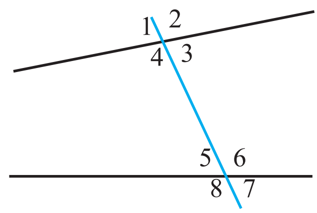


Fig. 9.8

(1, 5), (4, 8), (2, 6), (3, 7) se numesc ***unghiuri corespondente***;
(4, 6), (3, 5) se numesc ***unghiuri alterne interne***;
(1, 7), (2, 8) se numesc ***unghiuri alterne externe***;
(4, 5), (3, 6) se numesc ***unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei***;
(1, 8), (2, 7) se numesc ***unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei***.

Teorema 1. Dacă două drepte intersectate de o secantă formează (fig. 9.9):
1) sau două unghiuri alterne interne congruente;
2) sau două unghiuri alterne externe congruente;
3) sau două unghiuri corespondente congruente;
4) sau două unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplementare;
5) sau două unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei suplementare,

atunci sînt congruente toate unghiurile alterne interne, alterne externe şi corespondente; de asemenea, sînt suplementare toate unghiurile interne de aceeaşi parte a secantei şi cele externe de aceeaşi parte a secantei.

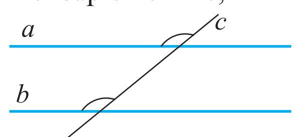


Fig. 9.9

Teorema 2. Două drepte distincte sînt paralele dacă şi numai dacă unghiurile alterne interne formate de o secantă cu aceste două drepte sînt congruente (fig. 9.10).

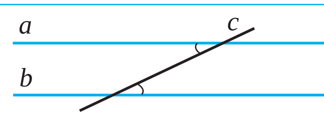


Fig. 9.10

Teorema 3. Două drepte distincte sînt paralele dacă şi numai dacă unghiurile alterne externe formate de o secantă cu aceste două drepte sînt congruente (fig. 9.11).

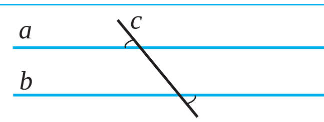


Fig. 9.11

Teorema 4. Două drepte distincte sînt paralele dacă şi numai dacă suma măsurilor unghiurilor interne de aceeaşi parte, formate de o secantă cu aceste două drepte, este egală cu 180° (fig. 9.12).

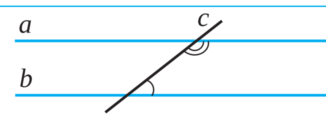


Fig. 9.12

Teorema 5. La intersecția dreptelor a şi b cu dreapta c, unghiurile corespondente sînt congruente dacă şi numai dacă $a \parallel b$.

Teorema 6 (proprietatea unghiurilor cu laturile respectiv paralele)
Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt congruente, dacă ambele sînt ascuțite sau obtuze, şi sînt suplementare, dacă unul este ascuțit, iar celălalt – obtuz.

Să demonstrăm, de exemplu, teorema 2.

Fie dreptele AB şi CD intersectate de secanta EF formează unghiurile alterne interne congruente CFE şi FEB (fig. 9,13). Să demonstrăm că dreptele AB şi CD sînt paralele.

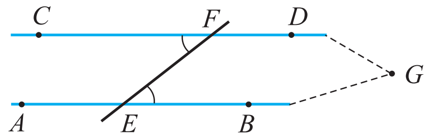


Fig. 9.13

Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că dreptele AB şi CD nu sînt paralele. Atunci ele trebuie să se intersecteze într-un punct G. Prin urmare, punctele E, F, G vor fi vîrfurile triunghiului EFG al cărui unghi exterior CFE este congruent cu unghiul interior BEF neadiacent lui, ceea ce contrazice afirmația conform căreia unghiul exterior al unui triunghi nu poate fi congruent cu nici unul din unghiurile interioare neadiacente.

Cum dreptele AB şi CD nu pot avea un punct comun, ele sînt paralele.

Invers, fie dreptele AB şi CD paralele şi să demonstrăm că unghiurile alterne interne CFE şi FEB formate de acestea cu secanta EF sînt congruente.

Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că unghiurile CFE şi FEB nu sînt congruente, de exemplu, $m(\angle CFE) > m(\angle FEB)$ (fig. 9.14). Din această presupunere deducem că prin punctul F putem duce o dreaptă MN, diferită de dreapta CD, astfel încît $m(\angle MFE) = m(\angle FEB)$. Conform demonstrației de mai sus, dreptele MN şi AB sînt paralele, deoarece la intersecția cu secanta EF se obțin unghiuri alterne interne congruente ($\angle MFE$ şi $\angle BEF$). De aici rezultă că prin punctul F trec două drepte distincte paralele (CD şi MN) cu aceeaşi dreaptă AB. Dar aceasta contrazice axioma **P** a paralelelor.

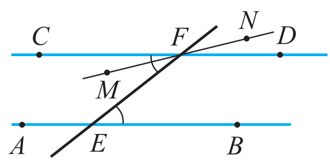


Fig. 9.14

Nu ne rămîne decît să admitem că unghiurile CFE şi BEF sînt congruente.

Corolare. **1.** Dacă două drepte sînt paralele, atunci orice perpendiculară pe una din ele este perpendiculară şi pe cealaltă.

2. Două drepte perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sînt paralele.

3. Perpendicularele pe două drepte concurente sînt de asemenea concurente.

Exercițiu. Demonstrați teoremele 1, 3–6.

Probleme propuse

A

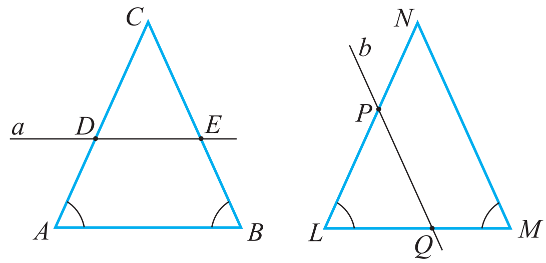
1. Să se formuleze o definiție a:
a) diagonalei unui poligon;
b) coardei unui cerc;
c) bisectoarei unui triunghi;
d) rombului.

2. Definițiile:
a) „Reuniunea segmentelor $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ se numeşte linie frîntă”;
b) „Pătratul este un paralelogram cu toate cele patru laturi congruente”
sînt incomplete. Cum pot fi transformate aceste definiții pentru a deveni corecte?

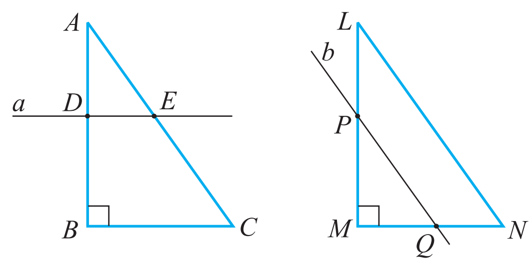
3. Să se formuleze „ipoteza” şi „concluzia” în propoziţia:
a) Două unghiuri opuse la vîrf sînt congruente.
b) Un diametru al unui cerc este mai mare decît orice coardă care nu trece prin centrul cercului.
c) Două triunghiuri sînt congruente dacă au laturile congruente.
d) Două drepte care au două puncte comune distincte coincid.

4. Care din următoarele propoziţii sînt adevărate? Pentru care dintre acestea sînt adevărate propoziţiile reciproce?
a) Mărimea unui unghi obtuz este mai mare decît mărimea unui unghi ascuţit.
b) Un triunghi care are două laturi congruente are şi două unghiuri congruente.
c) Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este egală cu 180°.
d) Dacă un patrulater convex are diagonalele congruente, atunci el este dreptunghi.

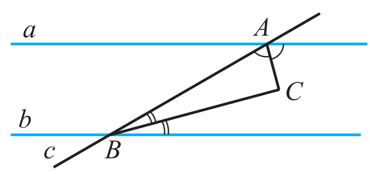
5. Triunghiurile ABC şi LMN din desen sînt isoscele. Dreapta $a \parallel AB$, dreapta $b \parallel MN$. Să se arate că triunghiurile CDE şi LQP sînt isoscele.



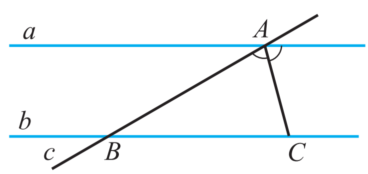
6. Triunghiurile ABC şi LMN din desen sînt dreptunghice. Dreapta $a \parallel BC$, dreapta $b \parallel LN$. Să se arate că triunghiurile ADE şi PMQ sînt dreptunghice.



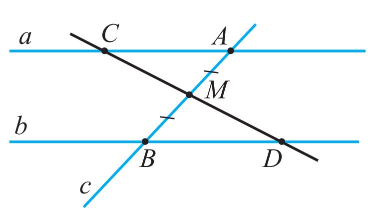
7. Dreptele a şi b din desen sînt paralele, c este secantă, AC şi BC sînt bisectoare. Să se arate că $AC \perp BC$.



8. Dreptele a şi b din desen sînt paralele, c este secantă, AC este bisectoare. Să se arate că $[AB] \equiv [BC]$.



9. Dreptele a şi b din desen sînt paralele, punctul M este mijlocul segmentului AB, CD este secantă care trece prin punctul M. Să se arate că punctul M este mijlocul segmentului CD.



B

10. Notăm cu P un patrulater şi considerăm propoziţiile:
1) P este un dreptunghi;
2) laturile lui P sînt congruente;
3) unghiurile lui P sînt congruente;
4) diagonalele lui P sînt congruente.

a) Să se construiască trei afirmaţii care au ca ipoteză a) şi drept concluzii respectiv b), c) şi d).
b) Să se determine care din aceste afirmaţii este falsă şi care din cele trei afirmaţii reciproce este adevărată.

11. Fie a şi b două drepte din planul P, concurente în punctul A. Să se descrie figura:
a) $a \cap b$, $a \cap P$, $b \cup P$;
b) $(a \cap b) \cup P$, $\{A\} \cap (a \cup b)$.

12. Fie D_1 şi D_2 două suprafeţe dreptunghiulare. În ce condiţii $D_1 \cup D_2$ este suprafaţă dreptunghiulară? Dar $D_1 \cap D_2$?

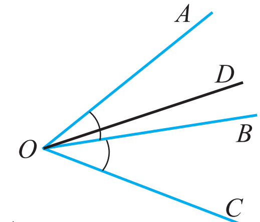
13. Fie T_1 şi T_2 două suprafeţe triunghiulare congruente. Cum pot fi aranjate aceste suprafeţe în plan, astfel încît:
a) $T_1 \cap T_2$ să fie suprafaţă hexagonală;
b) $T_1 \cup T_2$ să fie suprafaţă triunghiulară;
c) $T_1 \cup T_2$ să fie suprafaţă mărginită de un paralelogram?

14. Să se demonstreze că:

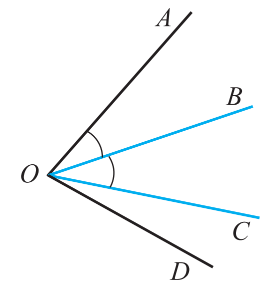
a) bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare sînt perpendiculare;

b) două unghiuri care au acelaşi vîrf şi laturile respectiv perpendiculare sînt congruente sau suplementare;

c) măsura unghiului format de bisectoarea OB a unghiului AOC şi semidreapta OD situată în interiorul unghiului AOB este egală cu semidiferenţa măsurilor unghiurilor DOC şi DOA.



d) măsura unghiului format de bisectoarea OB a unghiului AOC şi semidreapta OD externă unghiului AOC este egală cu semisuma măsurilor unghiurilor DOA şi DOC.



e) măsura unui unghi exterior al triunghiului este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui.

§ 2 Triunghiuri. Congruența triunghiurilor. Clasificări

Definiții. • Două segmente închise se numesc **congruente** dacă lungimile lor sînt egale.
• Două unghiuri se numesc **congruente** dacă măsurile lor sînt egale.

Congruența unghiurilor AOB şi $A_1O_1B_1$ se notează $\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$, iar congruența segmentelor AB şi A_1B_1 se notează $[AB] \equiv [A_1B_1]$.

Definiție. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ se numesc **congruente** dacă au loc relațiile: $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle ACB \equiv \angle A_1C_1B_1$, $\angle CBA \equiv \angle C_1B_1A_1$.

Se notează: $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Menționăm că din faptul că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ nu rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1C_1B_1$, adică la congruența triunghiurilor contează ordinea vîrfurilor.

Se poate demonstra că două triunghiuri, congruente cu al treilea, sînt congruente.

La rezolvarea multor probleme se aplică ***criteriile de congruență*** a două triunghiuri.

Criteriul LUL. Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ şi $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (fig. 9.15 a)).

Criteriul ULU. Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ (fig. 9.15 b)).

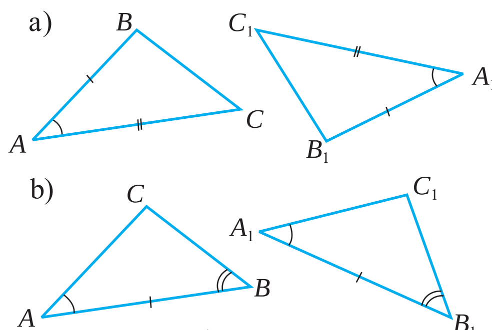


Fig. 9.15

Definiție. Triunghiul cu două laturi congruente se numeşte **triunghi isoscel**.

Teorema 7. Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sînt congruente.

Definiție. Triunghiul cu toate laturile congruente se numeşte **triunghi echilateral**.

Criteriul LLL. Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Demonstrație:

Fie ΔABC şi $\Delta A_1B_1C_1$ în care au loc relațiile din enunț (fig. 9.16). În virtutea axiomei **PT**, în semiplanul determinat de dreapta A_1B_1 ce nu conține punctul C_1 există $\Delta A_1B_1C_2$, astfel încît $\Delta A_1B_1C_2 \equiv \Delta ABC$ (1).

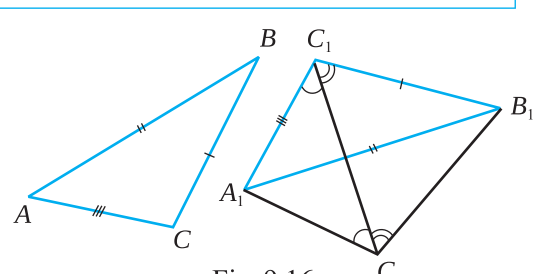


Fig. 9.16

Din (1) obținem: $[C_1A_1]\equiv[CA]\equiv[C_2A_1]$, $[C_1B_1]\equiv[CB]\equiv[C_2B_1]$.

Construim segmentul C_1C_2 şi obținem triunghiurile isoscele $C_2A_1C_1$ şi $C_2B_1C_1$, în care au loc relațiile $\angle A_1C_1C_2\equiv\angle A_1C_2C_1$ şi $\angle C_2C_1B_1\equiv\angle C_1C_2B_1$.

De aici rezultă că $\angle A_1C_1B_1\equiv\angle A_1C_2B_1$ şi, conform criteriului LUL, obținem că $\Delta A_1B_1C_1\equiv\Delta A_1B_1C_2$.

Cum $\Delta A_1B_1C_2\equiv\Delta ABC$, rezultă că $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$. ▶

Exercițiu. Demonstrați criteriile LUL şi ULU de congruență a triunghiurilor.

Unghiul adiacent suplementar unui unghi interior al triunghiului se numeşte ***unghi exterior*** al triunghiului.

Teorema 8 (proprietatea unghiului exterior al unui triunghi)
Măsura unghiului exterior al unui triunghi este mai mare decît măsura oricărui unghi interior neadiacent lui.

Demonstrație:

Vom demonstra că măsura unghiului exterior *FCB* al triunghiului *ABC* (fig. 9.17) este mai mare decît măsura unghiului interior *ABC*. Pentru aceasta, construim punctul *D* pe latura *BC*, astfel încît $[BD]\equiv[DC]$, iar pe semidreapta [*AD* luăm punctul *E*, astfel încît *D* să fie situat între *A* şi *E* şi $[AD]\equiv[DE]$. Cum punctele *A* şi *E* se află în semiplane diferite, determinate de dreapta *BC*, şi *A* se află pe complementara semidreptei [*DE*, deducem că punctul *E* este situat în interiorul unghiului *FCB*.

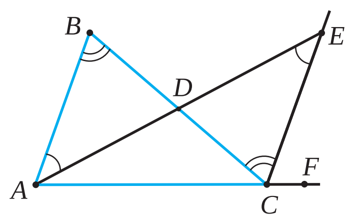


Fig. 9.17

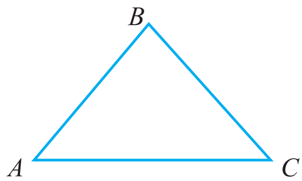
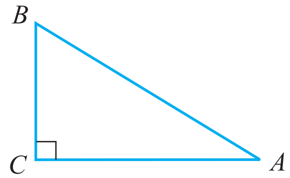
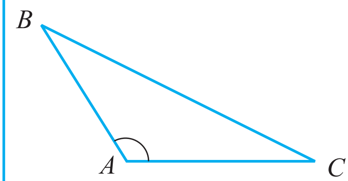
Aplicînd axioma $\mathbf{M_2}$, deducem că $m(\angle FCB)>m(\angle ECD)$.

Conform criteriului LUL de congruență a triunghiurilor, rezultă că $\Delta ABD\equiv\Delta ECD$ şi, prin urmare, $m(\angle ABC)=m(\angle ECD)<m(\angle FCB)$.

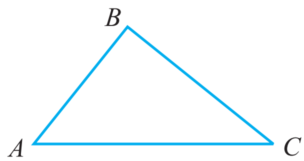
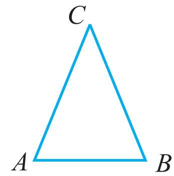
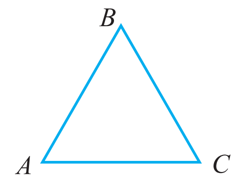
În mod analog se demonstrează că $m(\angle FCB)>m(\angle BAC)$. ▶

Amintim că triunghiurile se clasifică după:

✓ ***Unghiuri***

Triunghi ascuțitunghic	Triunghi dreptunghic	Triunghi obtuzunghic
		
Toate unghiurile sînt ascuțite: $m(\angle A)<90°$, $m(\angle B)<90°$, $m(\angle C)<90°$.	Un unghi este drept: $m(\angle C)=90°$.	Un unghi este obtuz: $m(\angle A)>90°$.

✓ ***Laturi***

Triunghi scalen (oarecare)	Triunghi isoscel	Triunghi echilateral
 Toate laturile au lungimi diferite: $AB \neq AC$, $AB \neq BC$, $AC \neq BC$.	 Două laturi congruente: $AC = BC$, $AC \neq AB$.	 Toate laturile congruente: $AB = AC = BC$.

Probleme rezolvate

1. Lungimea uneia din laturile congruente ale unui triunghi isoscel este de două ori mai mare decît lungimea bazei. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului, dacă semiperimetrul lui este de 40 cm.

Rezolvare:

Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 80 cm, deci $AB + AC + BC = 80$ cm.

Cum $AC = AB = 2BC$, obținem: $5BC = 80 \text{ cm} \Rightarrow BC = 16$ cm.

Atunci $AC = AB = 32$ cm.

Răspuns: 16 cm, 32 cm, 32 cm.

2. Să se arate că dacă două înălțimi ale unui triunghi sînt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Rezolvare:

Fie triunghiul ABC cu înălțimile BB_1 și CC_1 congruente (fig. 9.18). Triunghiurile BCC_1 și BCB_1 sînt dreptunghice cu ipotenuza BC comună și catetele BB_1 și CC_1 congruente. În baza criteriului IC (de congruență a triunghiurilor dreptunghice), rezultă că $\Delta BCC_1 \equiv \Delta CBB_1 \Rightarrow \angle C_1BC \equiv \angle B_1CB$, adică $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Deci, ΔABC este isoscel, c.c.t.d.

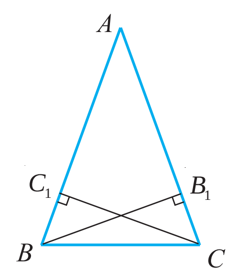


Fig. 9.18

3. Să se arate că o dreaptă perpendiculară pe bisectoarea unui unghi taie pe laturile unghiului segmente congruente.

Rezolvare:

Fie dreapta perpendiculară pe bisectoarea unghiului dat intersectează laturile și bisectoarea unghiului în punctele B, C și respectiv D (fig. 9.19).

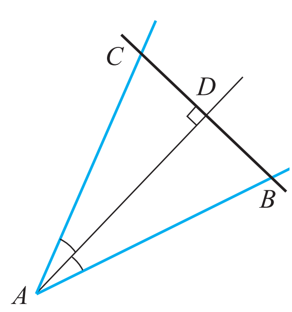


Fig. 9.19

Triunghiurile ABD şi ACD sînt congruente ca triunghiuri dreptunghice (criteriul CU), de unde rezultă că ipotenuzele sînt congruente, adică $[AC] \equiv [AB]$, c.c.t.d.

4. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau elementele a, b, m_a (două laturi şi mediana corespunzătoare uneia din cele două laturi) (fig. 9.20).

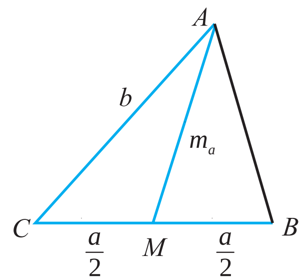


Fig. 9.20

Rezolvare:

Esenţa problemelor de construcţie constă în construirea unei figuri geometrice, fiind date unele elemente ale acesteia sau unele elemente ale figurii geometrice şi suma/diferenţa unor elemente ale acesteia.

Etapele de rezolvare a unei probleme de construcţie pot fi:

1) analiza condiţiilor în care poate fi construită figura geometrică;
2) construcţia figurii geometrice;
3) demonstraţia că figura geometrică construită verifică condiţia problemei;
4) discuţii.

Analiză. Admitem că triunghiul ABC este construit şi că $[AM]$ este mediana lui. Din condiţia problemei rezultă că triunghiul AMC poate fi construit, deoarece se cunosc laturile lui: $AC = b$, $CM = \frac{a}{2}$ şi $AM = m_a$. Vîrful B este situat pe semidreapta $[CM$, astfel încît $CM = MB = \frac{a}{2}$.

Construcţie. Construcţiile se execută cu rigla şi compasul. Construim triunghiul ACM cu $AC = b$, $CM = \frac{a}{2}$, $AM = m_a$. Pe semidreapta $[CM$ construim punctul B, astfel încît punctul M este mijlocul segmentului CB. Este evident că $CB = a$.

Demonstraţie. Din construcţia triunghiului ABC rezultă că AM este mediană şi are lungimea m_a, laturile AC şi BC au lungimile b şi respectiv a, deci triunghiul ABC verifică condiţia problemei.

Discuţii. Triunghiul ABC poate fi construit dacă poate fi construit triunghiul ACM. Prin urmare, soluţia există dacă cel mai mare dintre numerele b, $\frac{a}{2}$, m_a este mai mic decît suma celorlalte două.

Probleme propuse

A

1. Segmentele AB şi CD se intersectează în mijloacele lor. Să se determine lungimea segmentului AC, dacă $BD = 12$ cm.

2. O dreaptă intersectează segmentul AB în mijlocul lui. Distanţa de la punctul A la dreaptă este de 8 cm. Să se afle distanţa de la punctul B la dreaptă.

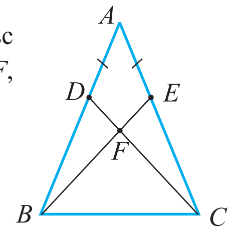
3. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 100 cm, iar lungimea bazei lui este de 40 cm. Să se determine lungimea laturilor congruente.

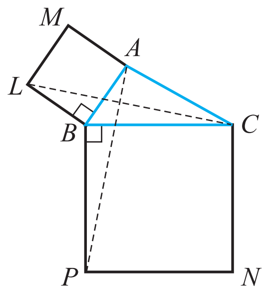
4. Să se afle perimetrul unui triunghi isoscel cu baza de 20 cm şi laturile congruente de 40 cm.

5. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 44 cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului, dacă lungimea bazei este cu 4 cm mai mică decît lungimea laturilor congruente.

6. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 56 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, dacă lungimea laturilor congruente este cu 2 cm mai mică decît lungimea bazei.

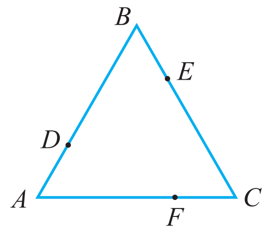
7. Pe laturile congruente AB şi AC ale triunghiului isoscel ABC se construiesc două segmente congruente, AD şi AE. Să se afle lungimea segmentului BF, dacă $CF = 3$ cm. (*Indicaţie*. $\Delta CDA \equiv \Delta BEA \Rightarrow \Delta CFB$ este isoscel).





8. Pe laturile AB şi BC ale triunghiului arbitrar ABC se construiesc în exterior pătratele $ABLM$ şi $BCNP$. Să se arate că $\Delta LBC \equiv \Delta ABP$.

9. Pe laturile triunghiului echilateral ABC se construiesc segmentele congruente AD, BE şi CF ca în figură. Ştiind că $DE = 3$ cm, să se determine lungimile celorlalte laturi ale ΔDEF.



B

10. Să se demonstreze că înălţimile corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sînt congruente.

11. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor alăturate bazei unui triunghi isoscel sînt congruente.

12. Să se demonstreze că medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sînt congruente.

13. Să se demonstreze că punctul egal depărtat de laturile unui unghi aparţine bisectoarei acestui unghi.

14. Prin mijlocul unui segment este construită o dreaptă. Să se demonstreze că extremităţile segmentului sînt egal depărtate de dreaptă.

15. Triunghiul ABC este isoscel $(AB = AC)$. Pe laturile AB şi AC se iau punctele B_1 şi respectiv C_1, astfel încît $AB_1 = AC_1$. Să se demonstreze că:
a) $\Delta AB_1C \equiv \Delta AC_1B$;
b) $\Delta CB_1B \equiv \Delta BC_1C$.

16. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt congruente. Să se demonstreze că:
a) medianele AM şi A_1M_1 sînt congruente;
b) bisectoarele AL şi A_1L_1 sînt congruente.

17. Fie triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu medianele AM şi respectiv A_1M_1. Să se demonstreze congruenţa triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, dacă se ştie că $[AM] \equiv [A_1M_1]$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$ şi $[BC] \equiv [B_1C_1]$.

18. Să se demonstreze congruența triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, ştiind că $[AC]\equiv[A_1C_1]$, $[AB]\equiv[A_1B_1]$ şi $[AM]\equiv[A_1M_1]$, unde $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sînt mediane ale triunghiurilor ABC şi respectiv $A_1B_1C_1$.

19. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt congruente, dacă $[BC]\equiv[B_1C_1]$, $[AM]\equiv[A_1M_1]$ şi $\angle CMA\equiv\angle C_1M_1A_1$, unde $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sînt mediane ale triunghiurilor ABC şi respectiv $A_1B_1C_1$.

20. Să se arate că lungimea medianei unui triunghi este mai mică decît semisuma lungimilor laturilor ce pornesc din acelaşi vîrf cu mediana.

21. Să se arate că suma lungimilor medianelor unui triunghi este mai mare decît semiperimetrul triunghiului şi este mai mică decît perimetrul lui.

22. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt congruente, dacă $[AM]\equiv[A_1M_1]$, $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sînt mediane ale triunghiurilor ABC şi respectiv $A_1B_1C_1$, $\angle MAC\equiv\angle M_1A_1C_1$ şi $\angle MAB\equiv\angle M_1A_1B_1$.

23. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt congruente, dacă $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[AL]\equiv[A_1L_1]$ şi $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1$ ($[AL]$ şi $[A_1L_1]$ sînt bisectoare ale triunghiurilor ABC şi respectiv $A_1B_1C_1$).

24. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB=AC)$ cu mediana AM. Să se calculeze lungimea medianei AM, dacă triunghiul ABC are perimetrul $\mathcal{P}$, iar triunghiul ABM are perimetrul $\mathcal{P}_1$.

25. Lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi se află în relația $a:b:c=3:4:5$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul lui este de 60 cm.

26. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se cunosc elementele:
a) $a,\ b,\ \angle C$; b) $a,\ \angle B,\ \angle C$; c) $\angle A,\ a,\ b\ (a>b)$.

27. Să se construiască triunghiul dreptunghic ABC (a, b sînt catete, iar c este ipotenuză), dacă se dau elementele:
a) a, c; b) $a,\ \angle B$; c) $c,\ \angle A$.

28. Să se construiască un triunghi isoscel, dacă se cunosc elementele:
a) baza şi latura congruentă; b) latura congruentă şi unghiul alăturat bazei;
c) baza şi unghiul alăturat bazei; d) latura congruentă şi unghiul opus bazei;
e) înălțimea corespunzătoare bazei şi latura congruentă;
f) înălțimea corespunzătoare bazei şi unghiul opus bazei;
g) baza şi unghiul format de bază cu înălțimea corespunzătoare laturii congruente.

29. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau mediana m_a şi unghiurile formate de mediană şi laturile triunghiului ce pornesc din acelaşi vîrf cu mediana.

30. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se cunosc elementele sau elementele şi suma/diferența unor elemente:
a) $a,\ b,\ h_b$; b) $a,\ h_a,\ m_a$; c) $a,\ b,\ m_c$; d) $a,\ b+c,\ \angle B$;
e) $a,\ b-c,\ \angle C$; f) $a,\ b+c,\ \angle A$; g) $a+b+c,\ \angle A,\ \angle B$; h) $a,\ b-c,\ \angle B-\angle C$.

§ 3 Paralelogramul şi proprietăţile lui. Trapezul

Observaţie. Aici şi în continuare vom examina patrulatere (poligoane) convexe, adică patrulatere (poligoane) situate în acelaşi semiplan închis determinat de dreapta suport a oricărei laturi a patrulaterului.

Definiţie. Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numeşte **paralelogram**.

Teorema 9. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă laturile opuse sînt congruente.

Teorema 10. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă două laturi opuse sînt paralele şi congruente.

Teorema 11. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă unghiurile opuse sînt congruente.

Teorema 12. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele lui au acelaşi mijloc.

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 9–12.

Teorema 13 (teorema paralelelor echidistante)
Fie dreptele neparalele a şi d. Dacă pe dreapta a sînt construite segmente congruente $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n$ şi prin extremităţile lor sînt construite drepte paralele cu dreapta d, atunci aceste drepte taie pe orice altă dreaptă b ($b \nparallel d$) segmente congruente $B_1B_2,\ B_2B_3,\ \ldots,\ B_{n-1}B_n$ (fig. 9.21).

Demonstraţie:

Construim prin punctele B_{i+1}, $i=1, \ldots, n-1$, semidrepte paralele cu dreapta a şi notăm punctele de intersecţie cu dreptele A_iB_i prin C_i. Se constată că patrulaterele $A_iA_{i+1}B_{i+1}C_i$ sînt paralelograme, de unde obţinem relaţiile $[C_iB_{i+1}] \equiv [A_iA_{i+1}]$, ca laturi opuse ale paralelogramului. Aplicînd criteriul de congruenţă ULU, se poate demonstra că $\Delta B_1C_1B_2 \equiv \Delta B_2C_2B_3 \equiv \ldots \equiv \Delta B_iC_iB_{i+1} \equiv \ldots \equiv \Delta B_{n-1}C_{n-1}B_n$, de unde rezultă că $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv \ldots \equiv [B_iB_{i+1}] \equiv \ldots \equiv [B_{n-1}B_n]$. ▶

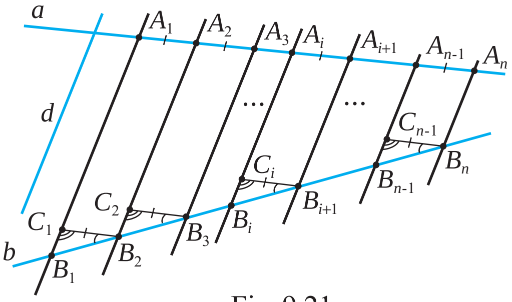


Fig. 9.21

Paralelograme particulare

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept. Din teorema 11 despre paralelogram rezultă că toate unghiurile dreptunghiului sînt drepte.

Teorema 14. Un paralelogram este dreptunghi dacă şi numai dacă diagonalele lui sînt congruente.

Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente. Prin urmare, toate laturile rombului sînt congruente.

> **Teorema 15.** Un paralelogram este romb dacă şi numai dacă diagonalele lui sînt perpendiculare sau sînt conţinute de bisectoarele unghiurilor lui.

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 14, 15.

Pătratul este rombul cu un unghi drept sau dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.

Trapezul este patrulaterul cu două laturi opuse paralele şi două ***laturi neparalele***. Laturile paralele se numesc ***baze*** (***baza mare*** şi ***baza mică***).

Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte ***trapez isoscel***.

Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte ***linie mijlocie*** a trapezului. Linia mijlocie este paralelă cu bazele şi lungimea ei este egală cu semisuma lungimilor lor.

Probleme rezolvate

1. Baza mică a unui trapez isoscel este congruentă cu latura neparalelă, iar diagonala trapezului este perpendiculară pe latura lui neparalelă. Să se afle măsurile unghiurilor interioare ale trapezului.

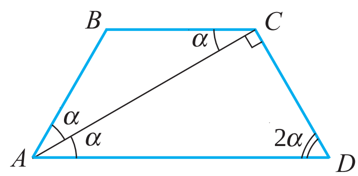


Fig. 9.22

Rezolvare:

Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $[AB]\equiv[BC]\equiv[CD]$ şi $AC\perp CD$ (fig. 9.22).

Cum $BC \parallel AD$, rezultă că $m(\angle BCA)=m(\angle CAD)=\alpha$. Deoarece $[AB]\equiv[BC]$, rezultă că ΔABC este isoscel cu $m(\angle BAC)=\alpha$. Cum unghiurile alăturate bazei trapezului isoscel sînt congruente, obţinem că $m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\alpha$. În triunghiul dreptunghic ACD avem $3\alpha=90°$, adică $\alpha=30°$. Atunci

$$m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\cdot 30°=60°, \qquad m(\angle ABC)=m(\angle BCD)=\alpha+90°=120°.$$

Răspuns: 120°, 120°, 60°, 60°.

2. Să se arate că măsura unghiului format de înălţimea şi mediana construite din vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic este egală cu diferenţa măsurilor unghiurilor ascuţite.

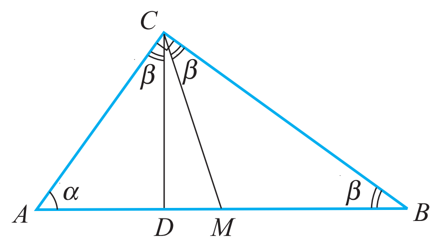


Fig. 9.23

Rezolvare:

Fie $[CD]$ înălţimea şi $[CM]$ mediana triunghiului dreptunghic ABC ($m(\angle C)=90°$, $M\neq D$) (fig. 9.23).

Triunghiurile CMB şi AMC sînt isoscele, deoarece $CM=MA=MB$. Unghiurile ACD şi CBA sînt congruente ca unghiuri ascuţite a două triunghiuri dreptunghice cu unghiul A comun. Prin urmare, $m(\angle DCM)=m(\angle ACM)-m(\angle ACD)=\alpha-\beta$, c.c.t.d.

Dacă $M\equiv D$, afirmaţia este evidentă.

3. Să se construiască un trapez, dacă se dau o bază, unghiul alăturat acestei baze şi laturile neparalele.

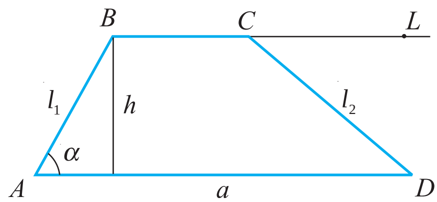


Fig. 9.24

Rezolvare:

Analiză. Fie trapezul *ABCD* construit cu baza $AD = a$, laturile neparalele $AB = l_1$, $CD = l_2$ şi unghiul *BAD* cu $m(\angle BAD) = \alpha$ (fig. 9.24).

Din condiția problemei rezultă că putem construi ΔBAD cunoscînd două laturi şi unghiul format de ele. Vîrful *C* se află pe semidreapta $[BL$, paralelă cu dreapta *AD*, şi pe cercul $\mathscr{C}(D, l_2)$ de centru *D* şi rază $CD = l_2$, deci punctul *C* este intersecția semidreptei $[BL$ cu cercul $\mathscr{C}(D, l_2)$.

Construcție. Construim ΔBAD, apoi construim semidreapta $[BL \parallel AD$ (punctele *L* şi *D* sînt în acelaşi semiplan limitat de dreapta *AB*). Construim cercul $\mathscr{C}(D, l_2)$. Punctul de intersecție a cercului $\mathscr{C}(D, l_2)$ cu semidreapta $[BL$ este al patrulea vîrf al trapezului.

Demonstrația este evidentă.

Discuții. Este evident că problema are soluții, dacă $C \in [BL, C \neq B$ şi $CD \geq h$, unde *h* este înălțimea trapezului.

Problema are două soluții, dacă $BD > CD > h$ (în cazul în care $CD = h$, există o unică soluție: trapezul este dreptunghic). Cum $BD = \sqrt{l_1^2 + a^2 - 2l_1 a \cos\alpha}$, $h = l_1 \sin\alpha$, obținem relația $\sqrt{l_1^2 + a^2 - 2l_1 a \cos\alpha} > l_2 \geq l_1 \sin\alpha$, care asigură existența soluției.

Probleme propuse

A

1. Diagonalele unui patrulater au lungimi de 16 cm şi 28 cm. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vîrfurile în mijloacele laturilor patrulaterului dat.
2. Bisectoarea unghiului *C* al paralelogramului *ABCD* intersectează latura *AD* în punctul *E*. Să se determine lungimea segmentului *AE*, dacă $AB = 18$ cm şi $AD = 30$ cm.
3. Unul din unghiurile unui paralelogram are măsura de 50°. Să se afle măsurile celorlalte unghiuri.
4. Diagonala unui paralelogram formează cu laturile paralelogramului unghiuri de 30° şi 40°. Să se determine măsurile unghiurilor paralelogramului.
5. Măsura unui unghi format de mediana corespunzătoare ipotenuzei şi ipotenuză este de 80°. Să se determine măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic.
6. Măsura unghiului format de mediana construită din vîrful unghiului drept şi una din catete a unui triunghi dreptunghic este de 20°. Să se afle măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.
7. Diferența măsurilor unghiurilor opuse ale unui trapez isoscel este egală cu 30°. Să se determine măsurile unghiurilor trapezului.

8. Piciorul înălțimii construite din vîrful unghiului obtuz al unui trapez isoscel împarte baza mare în segmente de 8 cm şi 32 cm. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

9. Lungimile bazelor unui trapez se raportă ca 3 : 2, iar lungimea liniei mijlocii a trapezului este de 70 cm. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

10. Punctele M şi N sînt situate în acelaşi semiplan limitat de dreapta d. Distanța de la punctul M la dreapta d este de 12 cm, iar distanța de la punctul N la dreapta d este de 28 cm. Să se determine distanța de la mijlocul segmentului MN la dreapta d.

B

11. Bisectoarea unghiului A al paralelogramului $ABCD$ intersectează latura BC în punctul E. Să se arate că triunghiul ABE este isoscel.

12. Să se demonstreze că lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

13. Să se demonstreze că dacă lungimea medianei unui triunghi este de două ori mai mică decît lungimea laturii căreia îi corespunde, atunci triunghiul este dreptunghic.

14. Să se arate că punctele de intersecție a bisectoarelor celor patru unghiuri interioare ale unui paralelogram sînt vîrfurile unui dreptunghi.

15. Lungimile bazelor unui trapez isoscel sînt a şi b $(a > b)$. Să se arate că piciorul înălțimii trapezului construite din vîrful unghiului obtuz împarte baza mare în două segmente cu lungimile $\frac{1}{2}(a+b)$ şi $\frac{1}{2}(a-b)$.

16. Lungimile diagonalelor unui patrulater sînt d_1 şi d_2. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vîrfurile în mijloacele laturilor patrulaterului dat.

17. Piciorul înălțimii construite din vîrful unghiului obtuz al unui trapez isoscel împarte baza trapezului în două segmente. Să se afle raportul lungimilor acestor segmente, dacă lungimile bazelor sînt de 40 cm şi 56 cm.

18. Să se construiască un romb, dacă se dau un unghi şi diagonala ce porneşte din vărful unghiului dat.

19. Să se construiască un romb, dacă se dau suma diagonalelor şi unghiul format de o diagonală cu una din laturile rombului.

20. Să se construiască un paralelogram, dacă se cunosc două laturi ce pornesc din acelaşi vîrf şi una din diagonale.

21. Să se construiască un paralelogram, dacă se dau diagonalele şi una din laturile lui.

22. Să se construiască un romb, dacă se dau o diagonală şi latura lui.

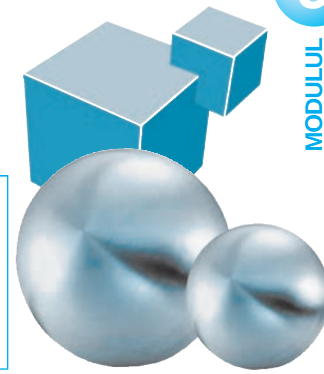
23. Să se construiască un romb, dacă se cunosc diagonalele lui.

24. Să se construiască trapezul $ABCD$, dacă se dau unghiurile ascuțite A şi D şi bazele $AD = a,\ BC = b\ (a > b)$.

25. Să se construiască un paralelogram, dacă se cunosc diagonalele şi înălțimea lui.

26. Să se construiască un trapez, dacă se dau o bază, înălțimea şi diagonalele sale.

§ 4 Asemănarea figurilor. Asemănarea triunghiurilor. Teorema lui Thales



Definiție. Fie k un număr real pozitiv. **Transformare de asemănare de coeficient** k (sau **asemănare de coeficient** k) **a planului** se numeşte aplicația planului pe el însuşi, care pentru orice două puncte distincte A, B şi imaginile lor respective A', B' satisface condiția $A'B' = kAB$.

Din egalitatea $A'B' = k \cdot AB$ rezultă că dacă $A \neq B$, atunci $A' \neq B'$.

Teorema 16. **1.** Compunerea a două asemănări de coeficienți k_1 şi k_2 este o asemănare de coeficient k_1k_2.
2. Transformarea inversă asemănării de coeficient k este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$.

Demonstrație:

1. Admitem că punctele arbitrare A şi B se aplică, prin asemănarea de coeficient k_1, pe punctele A' şi respectiv B', iar acestea, la rîndul lor, prin asemănarea de coeficient k_2, se aplică pe punctele A'' şi respectiv B''. Atunci $A'B' = k_1AB$ şi $A''B'' = k_2A'B'$. De aici obținem $A''B'' = k_1k_2AB$, adică transformarea care aplică punctele A şi B pe A'' şi respectiv B'' este o asemănare de coeficient k_1k_2.

2. La asemănarea de coeficient k, pentru punctele A şi B ale planului şi imaginile respective A' şi B' are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$. De aici rezultă că $AB = \frac{1}{k} \cdot A'B'$, adică transformarea care aplică punctele A' şi B' pe punctele A şi respectiv B este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$. ▶

Două figuri se numesc ***asemenea*** dacă există o transformare de asemănare a planului care aplică una din aceste figuri pe cealaltă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării $(k = 1)$.

Definiție. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ se numesc **triunghiuri asemenea** dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ şi $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$.

Se notează $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Amintim unele teoreme, proprietăți, precum şi criteriile de asemănare a triunghiurilor.

Teorema 17 (Thales). O dreaptă ce nu trece prin nici unul din vîrfurile unui triunghi şi este paralelă cu una din laturile lui taie pe dreptele determinate de celelalte două laturi segmente proporționale (fig. 9.25).

Teorema 18 (lema fundamentală a asemănării). Fie ABC un triunghi şi B_1 un punct pe dreapta BC, diferit de C. Dacă dreapta paralelă cu latura AB, ce trece prin punctul B_1, intersectează dreapta AC în punctul A_1, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ (fig. 9.25).

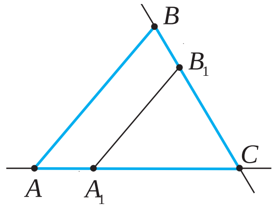


Fig. 9.25

Pentru a demonstra că două triunghiuri sînt asemenea, deseori se folosesc următoarele criterii de asemănare a triunghiurilor:

***Criteriul* 1**. Dacă două unghiuri ale unui triunghi sînt congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.

***Criteriul* 2**. Dacă două laturi ale unui triunghi sînt proporţionale cu două laturi ale altui triunghi şi unghiurile formate de aceste laturi sînt congruente, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.

***Criteriul* 3**. Dacă toate laturile unui triunghi sînt proporţionale cu laturile respective ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.

Teorema 19 (proprietatea bisectoarei unghiului interior al triunghiului) Fie triunghiul ABC şi un punct A' interior laturii BC. Pentru ca semidreapta $[AA'$ să fie bisectoare a unghiului interior BAC al acestui triunghi, este necesar şi suficient ca $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC}$ (fig. 9.26).

Teorema 20. Dacă laturile unghiului XOY sînt intersectate de n, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$, drepte paralele $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, atunci segmentele respective tăiate de aceste drepte pe laturile lui sînt proporţionale: $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (fig. 9.27).

Teorema 21. Dacă două drepte paralele, a şi b, sînt intersectate de n, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>2$, drepte ce trec prin acelaşi punct O, $O\notin a$, $O\notin b$, atunci segmentele tăiate pe dreptele a şi b sînt proporţionale: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (fig. 9.28).

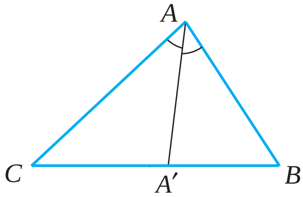


Fig. 9.26

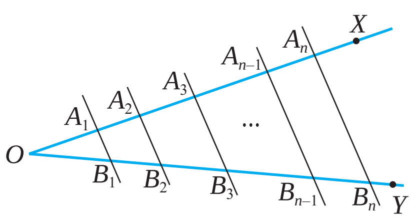


Fig. 9.27

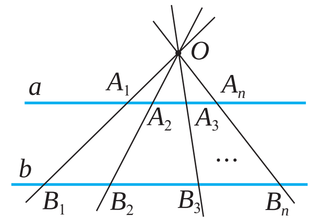


Fig. 9.28

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 19–21.

Problemă rezolvată

Laturile triunghiului ABC sînt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Să se afle latura rombului înscris în ΔABC, astfel încît un unghi al rombului coincide cu unghiul A al triunghiului, iar un vîrf al acestuia aparține laturii BC a triunghiului ABC (fig. 9.29).

Rezolvare:

Fie rombul $AMLN$ înscris în triunghiul ABC. Cum o diagonală a rombului este bisectoarea unghiului A al triunghiului dat, rezultă că vîrful L al rombului este punct de intersecție a laturii BC și bisectoarei unghiului A.

Triunghiurile MBL și ABC sînt asemenea, deci

$$AC : ML = BC : BL = (BL + LC) : BL = 1 + LC : BL. \quad (1)$$

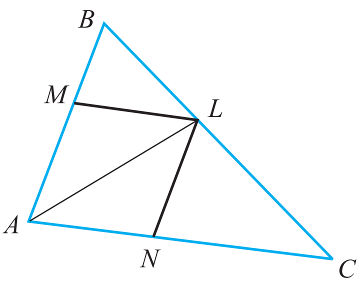


Fig. 9.29

Din teorema bisectoarei unui triunghi rezultă că

$$LC : BL = AC : AB = b : c. \quad (2)$$

Din egalitățile (1) și (2) obținem: $\frac{b}{ML} = 1 + \frac{b}{c} \Rightarrow ML = \frac{bc}{b+c}$.

Răspuns: Latura rombului este $\frac{bc}{b+c}$.

Probleme propuse

A

1. Lungimile a două laturi ale unui triunghi isoscel sînt de 18 cm și 6 cm, iar lungimea laturilor congruente ale unui alt triunghi isoscel este de 6 cm. Să se calculeze lungimea bazei triunghiului al doilea, dacă unghiurile alăturate bazei ale primului triunghi sînt congruente cu unghiurile alăturate bazei ale triunghiului al doilea.

2. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea și $AB = 12$ cm, $A_1B_1 = 3$ cm, $AC = 16$ cm, $B_1C_1 = 2$ cm. Să se afle perimetrele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.

3. Piciorul înălțimii CD a triunghiului dreptunghic ABC $(m(\angle C) = 90°)$ împarte ipotenuza în segmentele $AD = 18$ cm și $BD = 32$ cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC.

4. În triunghiul ABC, cu înălțimea $AD = 10$ cm și latura $BC = 15$ cm, este înscris un pătrat, astfel încît două vîrfuri ale acestuia aparțin laturii BC, iar celelalte două se află pe laturile AB și AC. Să se afle lungimea laturii pătratului.

5. Dreptele suport ale laturilor neparalele AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Să se determine lungimile laturilor triunghiului AED, dacă $AB = 10$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 30$ cm.

6. Lungimile umbrelor a doi copaci sînt de 10,8 m și 1,8 m. Copacul al doilea are înălțimea de 1,2 m. Să se afle înălțimea primului copac.

B

7. Unghiurile A şi A_1 ale triunghiurilor isoscele ABC $([AB]\equiv[AC])$ şi $A_1B_1C_1$ $([A_1B_1]\equiv[A_1C_1])$ sînt congruente. Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90°$ şi înălţimea CD. Să se arate că:
a) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; b) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$; c) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

9. Fie triunghiurile asemenea ABC şi $A_1B_1C_1$ cu medianele AM şi respectiv A_1M_1. Să se arate că $A_1M_1 : AM = A_1B_1 : AB$.

10. Fie triunghiurile asemenea ABC şi $A_1B_1C_1$ cu bisectoarele AL şi respectiv A_1L_1. Să se arate că $A_1L_1 : AL = A_1B_1 : AB$.

11. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Să se arate că $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ dacă şi numai dacă $BC \parallel AD$.

12. Să se arate că dacă H este punctul de intersecţie a dreptelor suport ale înălţimilor AA_1, BB_1, CC_1 ale oricărui triunghi ABC, atunci au loc relaţiile $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

13. Să se arate că în orice trapez sînt coliniare: punctul de intersecţie a dreptelor suport ale laturilor neparalele, mijloacele bazelor şi punctul de intersecţie a diagonalelor.

14. Fie triunghiul ABC $(AB < BC)$ cu bisectoarea BL şi mediana BM. Să se arate că $BL < BM$.

15. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul M şi are loc relaţia $AM \cdot CM = BM \cdot MD$. Să se arate că $\angle ADB \equiv \angle ACB$.

16. Lungimile laturilor unui triunghi se raportă ca $2:4:5$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului asemenea cu cel dat, ştiind că perimetrul lui este de 66 cm.

17. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt asemenea şi $AB=32$ cm, $BC=40$ cm, $A_1B_1=24$ cm, $AC-A_1C_1=12$ cm. Să se determine lungimile celorlalte laturi ale triunghiurilor.

18. Fie triunghiul ABC cu $M\in AB$, $N\in BC$ şi $MN \parallel AC$. Să se afle lungimea segmentului AM, dacă $AB=32$ cm, $AC=40$ cm şi $MN=30$ cm.

19. Dreptele suport ale laturilor neparalele AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Să se afle înălţimea triunghiului AOD, dacă $BC=14$ cm, $AD=42$ cm şi înălţimea trapezului este de 6 cm.

20. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau elementele $\angle A$, b, iar $b:c=m:n$.

21. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se cunosc elementele $\angle A$, $\angle C$ şi suma $b+h_b$.

22. În triunghiul ABC să se înscrie un pătrat, astfel încît două vîrfuri să fie situate pe latura AB, iar celelalte două să fie situate pe laturile AC şi BC.

23. Să se construiască un triunghi isoscel, fiind date unghiul format de laturile congruente şi suma lungimii bazei şi a înălţimii corespunzătoare bazei.

§5 Linii şi puncte remarcabile ale triunghiului

Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte ***linie mijlocie*** a triunghiului.

Teorema 22. Dacă $[MN]$ este linia mijlocie a triunghiului ABC (M este mijlocul laturii AB, N – mijlocul laturii BC), atunci $[MN] \parallel [AC]$ şi $2MN = AC$ (fig. 9.30).

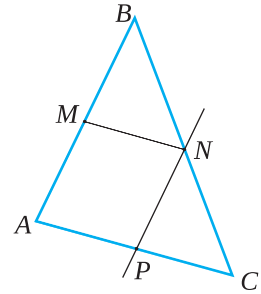


Fig. 9.30

Demonstraţie:

Prin punctul M construim o dreaptă paralelă cu AC. Conform teoremei 13, această dreaptă va intersecta latura BC în mijlocul ei, deci va trece prin punctul N. Astfel, obţinem $[MN] \parallel [AC]$. Dacă prin punctul N vom construi o dreaptă paralelă cu latura AB, atunci ea va intersecta latura AC în mijlocul ei, pe care îl notăm P, deci $AC = AP + PC = 2AP$. Patrulaterul $AMNP$ este un paralelogram, prin urmare, $MN = AP$.

Din ultimele două egalităţi rezultă că $2MN = AC$. ▶

Segmentul determinat de un vîrf al triunghiului şi mijlocul laturii opuse acestui vîrf se numeşte ***mediană a triunghiului***.

Teorema 23. Medianele unui triunghi sînt concurente într-un punct care împarte fiecare mediană în raportul 2 : 1, considerînd de la vîrf.

Exerciţiu. Demonstraţi teorema 23.

Punctul de intersecţie a medianelor triunghiului se numeşte ***centru de greutate al triunghiului***.

Mediatoare a unui segment se numeşte dreapta ce trece prin mijlocul segmentului şi este perpendiculară pe el.

Folosind proprietatea mediatoarei (punctele mediatoarei segmentului sînt egal depărtate de extremităţile lui), se poate demonstra că mediatoarele laturilor unui triunghi se intersectează într-un punct egal depărtat de vîrfurile lui. Acest punct este ***centrul cercului circumscris*** triunghiului. Prin urmare, oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc.

Segmentul determinat de un vîrf al triunghiului şi proiecţia acestui vîrf pe dreapta suport a laturii opuse se numeşte ***înălţime a triunghiului***.

Teorema 24. Dreptele suport ale înălţimilor triunghiului sînt concurente.

Exerciţiu. Demonstraţi teorema 24.

Punctul de intersecţie a dreptelor suport ale înălţimilor triunghiului se numeşte ***ortocentru al triunghiului***.

Triunghiul se numeşte ***înscris într-un cerc*** dacă vîrfurile lui se află pe cerc. Triunghiul se numeşte ***circumscris unui cerc*** dacă laturile lui sînt tangente la cerc.

Segmentul conținut de bisectoarea unui unghi al triunghiului și care este determinat de vîrful acestui unghi și de punctul de intersecție a bisectoarei lui cu latura opusă se numește ***bisectoare a triunghiului***.

Teorema 25. Bisectoarele unghiurilor interioare ale triunghiului sînt concurente în centrul cercului înscris în triunghi.

Mediatoarea, mediana, bisectoarea și înălțimea triunghiului se numesc ***linii remarcabile ale triunghiului***.

Centrul cercului înscris în triunghi, centrul cercului circumscris triunghiului, centrul de greutate al triunghiului și ortocentrul triunghiului se numesc ***puncte remarcabile ale triunghiului***.

Probleme rezolvate

1. Baza AC a triunghiului isoscel ABC are lungimea de 10 cm, iar laturile congruente AB și BC au lungimea de 13 cm. Să se determine distanța dintre punctul de intersecție a medianelor și punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului.

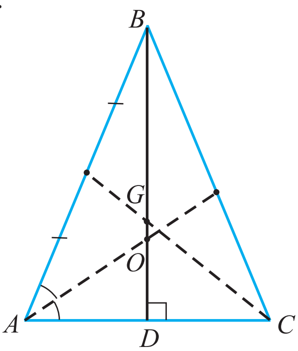


Fig. 9.31

Rezolvare:

Deoarece înălțimea BD a triunghiului isoscel ABC este mediană și bisectoare, punctul G de intersecție a medianelor și punctul O de intersecție a bisectoarelor sînt situate pe BD (fig. 9.31). Aflăm $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (cm).

Conform proprietății medianelor, $GD=\frac{1}{3}BD=4$ cm.

Conform proprietății bisectoarei AO a triunghiului ABD, avem $\frac{OD}{OB}=\frac{AD}{AB}=\frac{5}{13}$.

Deoarece $OB=BD-OD=12-OD$, rezultă că $OD=\frac{10}{3}$ cm.

Prin urmare, $OG=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$ (cm).

2. În triunghiul ABC sînt duse înălțimile AA_1 și BB_1 (fig. 9.32). Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului A_1B_1C, știind că $\text{m}(\angle A)=\alpha$, $\text{m}(\angle B)=\beta$, $\alpha+\beta\neq 90°$.

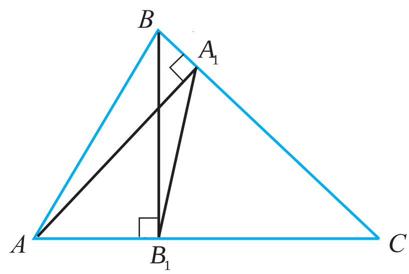


Fig. 9.32

Rezolvare:

Deoarece triunghiurile dreptunghice BB_1C și AA_1C au unghiurile ascuțite de la vîrful C congruente, ele sînt asemenea. Prin urmare, $\frac{BC}{B_1C}=\frac{AC}{A_1C}$.

Cum triunghiurile ABC și A_1B_1C au laturile, ce determină unghiurile congruente de la vîrful comun C, proporționale, conform criteriului 2 de asemănare, ele sînt asemenea.

Prin urmare, $\text{m}(\angle CA_1B_1)=\text{m}(\angle CAB)=\alpha$, $\text{m}(\angle CB_1A_1)=\text{m}(\angle CBA)=\beta$.

Concluzia ce rezultă din această problemă poate fi formulată astfel: *dacă picioarele înălțimilor duse din două vîrfuri ale unui triunghi nu coincid, atunci, împreună cu al treilea vîrf al triunghiului, ele determină un triunghi asemenea cu cel dat.*

3. Triunghiul ABC este isoscel cu baza BC (fig. 9.33). În acest triunghi înălțimea $AA_1 = 6$ cm și înălțimea $CC_1 = 9{,}6$ cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

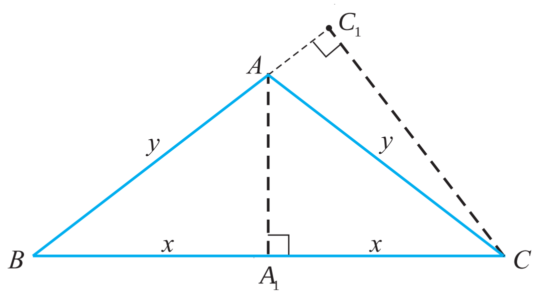


Fig. 9.33

Rezolvare:

Fie $A_1C = A_1B = x,\ AB = AC = y.$ Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice CC_1B și AA_1B deducem:

$\dfrac{CC_1}{AA_1} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow \dfrac{2x}{y} = \dfrac{9{,}6}{6}$. De aici $y = \dfrac{5}{4}x.$

Conform teoremei lui Pitagora, din ΔAA_1C obținem $x^2 + 36 = y^2$.

Rezolvînd sistemul de ecuații $\begin{cases} y = \dfrac{5}{4}x, \\ x^2 + 36 = y^2, \end{cases}$ obținem $x = 8,\ y = 10.$

Astfel, $AB = AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm.

Probleme propuse

A

1. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 6 cm și 8 cm. Medianele corespunzătoare acestor laturi sînt perpendiculare. Să se afle lungimea laturii a treia.
2. Să se determine perimetrul triunghiului cu vîrfurile în mijloacele laturilor unui triunghi avînd laturile de 12 cm, 6 cm și 8 cm.
3. Lungimea bazei unui triunghi isoscel este de $4\sqrt{2}$ cm, iar măsura unghiului opus bazei este de 120°. Să se afle înălțimile triunghiului.
4. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 10 cm și 16 cm, iar unghiul format de ele este de 120°. Să se afle înălțimile corespunzătoare acestor laturi.
5. Un punct al ipotenuzei este egal depărtat de catete și împarte ipotenuza în segmente cu lungimi de 30 cm și 40 cm. Să se determine lungimile catetelor.
6. Două mediane ale unui triunghi sînt perpendiculare și au lungimile de 4,5 cm și 6 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.
7. Mediana construită din vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic este congruentă cu o catetă și are lungimea de 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.
8. Să se determine lungimile bisectoarelor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic cu catetele de 3 cm și 4 cm.
9. Lungimea unei laturi a unui triunghi este de 36 cm. Prin punctul de intersecție a medianelor triunghiului este construită o dreaptă paralelă cu latura dată. Să se afle lungimea segmentului tăiat din această dreaptă de laturile triunghiului.

B

10. Medianele corespunzătoare catetelor unui triunghi dreptunghic au lungimile de $\sqrt{52}$ cm şi $\sqrt{73}$ cm. Să se determine lungimea ipotenuzei.

11. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sînt de 9 cm şi 12 cm. Să se afle distanța dintre punctul de intersecție a bisectoarelor şi punctul de intersecție a medianelor acestui triunghi.

12. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi, ştiind că înălțimea şi mediana construite din acelaşi vîrf împart unghiul în trei unghiuri congruente.

13. Distanțele de la centrul cercului înscris într-un triunghi dreptunghic la vîrfurile unghiurilor ascuțite sînt de $\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{10}$ cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului şi raza cercului înscris în acest triunghi.

14. Lungimile laturilor unui triunghi sînt de 5 cm, 6 cm, 7 cm. Centrul cercului înscris în acest triunghi împarte bisectoarea unghiului mai mare în două segmente. Să se afle raportul lungimilor segmentelor obținute.

15. Să se determine lungimile bisectoarelor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic cu catetele de 18 cm şi 24 cm.

16. În cercul de rază R este înscris un triunghi isoscel. Ştiind că suma înălțimii corespunzătoare bazei şi lungimii bazei este egală cu lungimea diametrului cercului, să se afle înălțimea triunghiului corespunzătoare bazei.

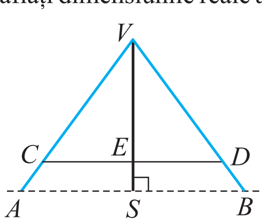
17. Fie triunghiul ABC cu înălțimile AA_1 şi BB_1. Să se determine lungimea laturii BC, dacă $AC = 6$ cm, $B_1C = 4$ cm, $A_1C = 3$ cm.

Proba de evaluare I

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

A

1. Imaginea fotografică, luată din avion, a unui lan de porumb are forma unui dreptunghi cu dimensiunile 4×3 cm. Ştiind că raportul de asemănare între fotografie şi plan este 1:10 000, aflați dimensiunile reale ale lanului de porumb. **2**

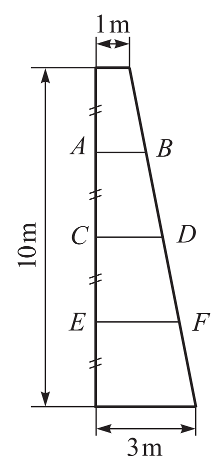


2. O scară dublă are lungimea unui braț [VA] de 5 m. Pentru fixare, se foloseşte un fir [CD], la distanța de 1 m pe braț ([AC]), de la sol. Care este lungimea firului, dacă lungimea scării ([VS]) este de 4 m? **2**

3. Dintr-o țeavă cu raza de 125 mm pleacă trei țevi de acelaşi diametru. Aflați diametrul acestor țevi, astfel încît ele să preia tot debitul. **2**

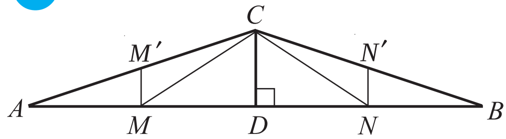
4. Fie ABC triunghi dreptunghic în A şi [BD] – bisectoarea unghiului B ($D \in AC$). Ştiind că $CD = 5$ cm, $AD = 4$ cm, determinați lungimile laturilor triunghiului. **2**

5. Un pilon metalic are forma şi dimensiunile principale ca în figură. Determinați lungimea grinzilor orizontale AB, CD, EF. **2**



B

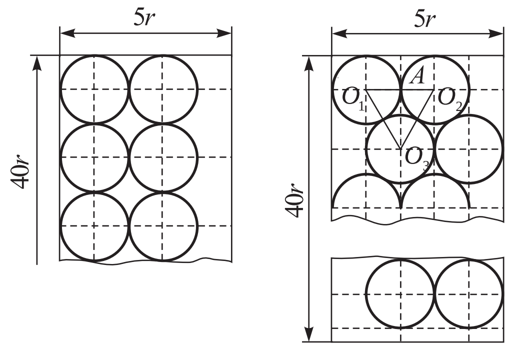
1. Un acoperiş triunghiular are deschiderea $AB = d$, iar panta $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{3}$. Determinaţi lungimea grinzii CN, dacă $DN = NB$. 2



2. Dintr-o foaie pătrată de latură a se decupează colţuri, astfel încît să se obţină o piesă octogonală regulată. Aflaţi lungimea laturii octogonului. 2

3. Calculaţi cîte discuri de rază r se pot confecţiona prin tăierea neraţională şi prin tăierea raţională a unei benzi de metal avînd lăţimea $5r$ şi lungimea $40r$ (în figură se arată tăierea neraţională (a) şi cea raţională (b)). 3

4. Într-un atelier de tăiere a tablei rămîn deşeuri în formă de triunghi echilateral de latură 240 mm. Pentru un nou produs introdus în fabricaţie se vor executa piese în formă de pătrat cu latura de 80 mm şi în formă de dreptunghi cu dimensiunile 190×220 mm. 3
Care din aceste piese se pot executa din deşeuri?



a) b)

§ 6 Relaţii metrice în triunghiuri şi cercuri

6.1. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Fie triunghiul ABC, dreptunghic în C, cu notaţiile obişnuite şi CD înălţimea corespunzătoare laturii AB (fig. 9.34).

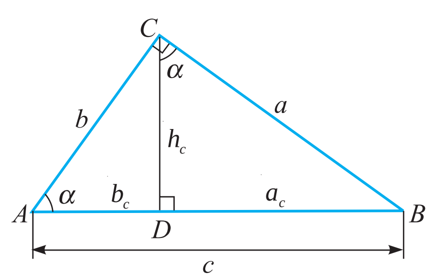


Fig. 9.34

În triunghiurile ACB, CDB, ADC avem:

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ (1), $\quad \frac{b}{c} = \cos\alpha$ (2);

$\frac{a_c}{a} = \sin\alpha$ (3), $\quad \frac{a_c}{h_c} = \text{tg}\,\alpha$ (4);

$\frac{b_c}{b} = \cos\alpha$ (5), $\quad \frac{h_c}{b_c} = \text{tg}\,\alpha$ (6).

Comparînd egalităţile (1) şi (3), (2) şi (5), (4) şi (6), obţinem:

$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}$, adică $a^2 = c \cdot a_c$ (7);

$\frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}$, adică $b^2 = c \cdot b_c$ (8);

$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$, adică $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

Adunînd egalitățile (7) și (8) membru cu membru, obținem: $a^2+b^2=c(a_c+b_c)$. Cum $a_c+b_c=c$, rezultă că $a^2+b^2=c^2$.

Astfel, am demonstrat următoarele trei teoreme.

Teorema 26 (teorema catetei). Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii unei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acestei catete pe ipotenuză.

În figura 9.35, $AC^2=BC\cdot CD$, $AB^2=BC\cdot BD$.

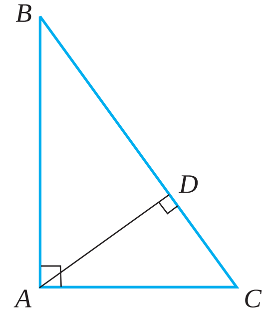


Fig. 9.35

Teorema 27 (teorema înălțimii). Într-un triunghi dreptunghic, pătratul înălțimii construite din vîrful unghiului drept pe ipotenuză este egal cu produsul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

În figura 9.35, $AD^2=CD\cdot BD$.

Teorema 28 (teorema lui Pitagora). Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

În figura 9.35, $BC^2=AC^2+AB^2$.

Probleme rezolvate

1. În interiorul unghiului O cu măsura de 60° se consideră un punct M situat la distanțele 2 cm și 11 cm de laturile unghiului. Să se afle distanța de la punctul M la vîrful unghiului (fig. 9.36).

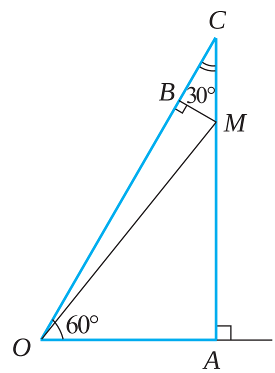


Fig. 9.36

Rezolvare:

Avem $MA=11$ cm, $MB=2$ cm. Prelungim AM pînă la intersecția în C cu latura OB a unghiului AOB. Cum ΔMBC este dreptunghic cu $m(\angle C)=30°$, rezultă că $CM=4$ cm.

În triunghiul dreptunghic OAC avem:

$$OA=AC\cdot \operatorname{tg}30°=\frac{15}{\sqrt{3}}\text{ (cm)}.$$

Aplicăm triunghiului dreptunghic OAM teorema lui Pitagora și obținem:

$$OM=\sqrt{OA^2+AM^2}=\sqrt{75+121}=14\text{ (cm)}.$$

Răspuns: $OM=14$ cm.

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC. AD este înălțimea construită din vîrful unghiului drept, iar E și F sînt proiecțiile punctului D pe catetele AB și respectiv AC. Să se demonstreze că $BD\cdot CD=CF\cdot AF+BE\cdot AE$ (fig. 9.37).

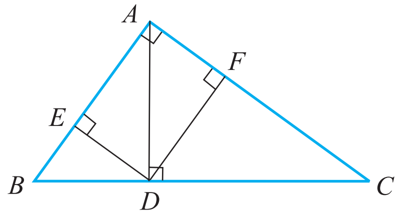


Fig. 9.37

Rezolvare:

Patrulaterul *AEDF* este un dreptunghi. Prin urmare, $AD^2 = ED^2 + FD^2$ (9).

Aplicăm triunghiurilor *ABC, ADB, ADC* teorema înălțimii şi obținem:

$$AD^2 = BD \cdot CD, \quad ED^2 = AE \cdot BE, \quad DF^2 = CF \cdot AF. \qquad (10)$$

Substituind (10) în (9), obținem c.c.t.d.

3. Să se exprime raza r a cercului înscris în triunghiul dreptunghic *ABC* prin catetele a, b şi ipotenuza c (fig. 9.38).

Rezolvare:

Fie O centrul cercului înscris în triunghiul *ABC* şi E, F, G punctele de tangență. Cum patrulaterul *EOGC* este un pătrat cu latura r, rezultă că $GB = a - r = FB$, $AE = b - r = AF$ (segmentele determinate de un punct şi de punctele de tangență la cerc au lungimi egale). Dar $AF + FB = AB = c$.

Deci, $c = a - r + b - r \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{a+b-c}{2}}$.

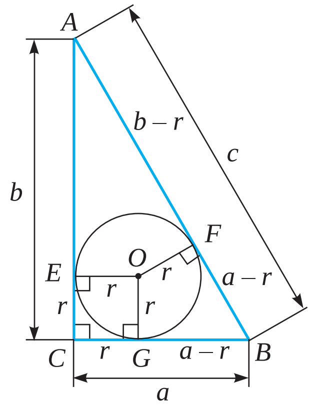


Fig. 9.38

4. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* cu catetele a şi b. Este construită bisectoarea unui unghi ascuțit al triunghiului. Să se determine lungimea perpendicularei construite din vîrful unghiului drept pe această bisectoare. Să se cerceteze ambele cazuri posibile (fig. 9.39).

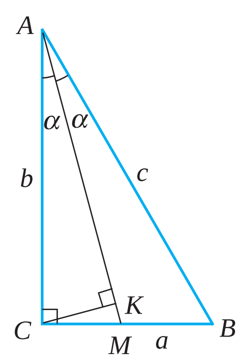


Fig. 9.39

Rezolvare:

Fie $[AM]$ bisectoarea unghiului A, $CK \perp AM$.

Conform teoremei lui Pitagora, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

În ΔABC avem $\dfrac{b}{c} = \cos 2\alpha$. Cum

$\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \dfrac{1 - \frac{b}{c}}{2}$, obținem că

$\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \dfrac{b}{c}}$.

În ΔCKA avem $CK = b \sin \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$.

Prin raționamente similare, determinăm lungimea perpendicularei şi în cazul în care bisectoarea este construită din vîrful B: $\dfrac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$.

Răspuns: $\dfrac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ sau $\dfrac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$.

5. Catetele triunghiului dreptunghic ABC au lungimile a şi b. Să se determine lungimea bisectoarei unghiului drept (fig. 9.40).

Rezolvare:

Fie l lungimea bisectoarei CD.

Ducem $DE \perp AC$ şi notăm $DE = x$. Cum ΔDEC este dreptunghic isoscel, rezultă că $l = x\sqrt{2}$.

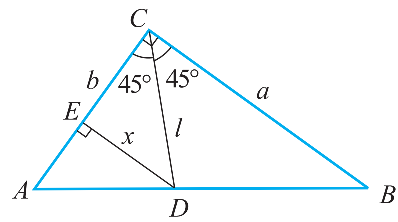


Fig. 9.40

Ţinînd cont că $\Delta AED \sim \Delta ACB$, obţinem: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{ED}{BC} \Rightarrow \dfrac{b-x}{b} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = \dfrac{ab}{a+b}$.

Astfel, $l = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Probleme propuse

A

1. În interiorul unui unghi cu măsura de 60° se consideră un punct M, situat la distanţele $\sqrt{7}$ cm şi $2\sqrt{7}$ cm de laturile unghiului. Să se determine distanţa de la punctul M la vîrful unghiului.
2. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sînt de 9 cm şi 12 cm. Să se afle razele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului.
3. Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu lungimea uneia dintre catete. Să se determine măsurile unghiurilor ascuţite ale triunghiului.
4. Piciorul înălţimii construite din vîrful unghiului drept împarte ipotenuza unui triunghi în segmente de 4 cm şi 9 cm. Să se afle lungimile catetelor.
5. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sînt de 8 cm şi 12 cm. Să se afle lungimea bisectoarei unghiului drept.
6. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de 5 cm şi 12 cm. Să se determine lungimile catetelor.
7. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte una din catete în segmente de 3 cm şi 9 cm. Să se afle lungimea ipotenuzei şi a celeilalte catete.

B

8. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt de 6 cm şi 8 cm. Să se determine distanţa de la centrul cercului înscris în triunghi la centrul cercului circumscris triunghiului.
9. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este de 15 cm, iar raza cercului înscris – de 6 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.
10. Fie triunghiul dreptunghic ABC şi $[CD]$ bisectoarea unghiului drept. Ştiind că $AD = m$ şi $BD = n$, să se determine înălţimea construită din vîrful C.

11. În triunghiul dreptunghic *ABC* din vîrful unghiului drept este construită înălțimea *CD*. Razele cercurilor înscrise în triunghiurile *ADC* şi *BDC* sînt r_1 şi respectiv r_2. Să se determine raza cercului înscris în triunghiul *ABC*.

12. Să se demonstreze că dacă unul din unghiurile unui triunghi dreptunghic are măsura de 15°, atunci înălțimea construită din vîrful unghiului drept are lungimea egală cu un sfert din lungimea ipotenuzei.

(*Indicație*. Construiți mediana corespunzătoare laturii opuse vîrfului unghiului drept.)

13. Bisectoarea unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic împarte cateta opusă în segmente de 4 cm şi 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

14. Într-un triunghi dreptunghic este înscris un semicerc, astfel încît diametrul lui este situat pe ipotenuză, iar centrul lui împarte ipotenuza în segmente de 3 cm şi 4 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului şi raza semicercului.

15. În triunghiul *ABC*, dreptunghic în *A*, cu $AC = 1\text{m}$, *E* şi *F* sînt mijloacele segmentelor *BC* şi respectiv *AB*, iar dreptele *AE* şi *CF* sînt perpendiculare. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.

16. Piciorul *D* al înălțimii *CD* construite din vîrful unghiului drept al triunghiului *ABC* este situat la distanțele *m* şi *n* de catetele *AC* şi respectiv *BC*. Să se determine lungimile catetelor.

6.2. Relații metrice în triunghiul arbitrar

Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC* cu notațiile obişnuite şi $CD = h$ – înălțimea construită din vîrful *C* (fig. 9.41)

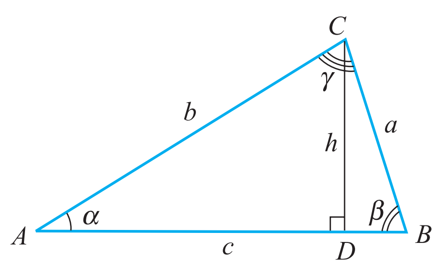


Fig. 9.41

În ΔADC avem $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, adică $h = b\sin\alpha$, iar în ΔBDC avem $\frac{h}{a} = \sin\beta$, adică $h = a\sin\beta$. Prin urmare, $b\sin\alpha = a\sin\beta$, adică $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

În mod analog, construind înălțimile din vîrfurile *A* şi *B*, obținem că $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ şi respectiv $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Combinînd aceste rezultate, obținem:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

În cazul triunghiului obtuzunghic *ABC*, prin raționamente asemănătoare obținem acelaşi rezultat.

Exercițiu. Efectuați aceste raționamente.

Astfel, am demonstrat

Teorema 29 (teorema sinusurilor). Lungimile laturilor oricărui triunghi ABC sînt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \text{ (fig. 9.42).}$$

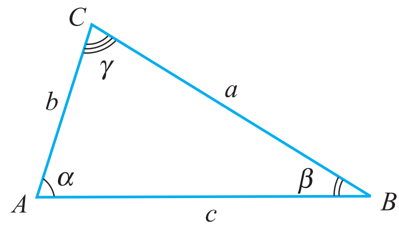


Fig. 9.42

Fie ABC un triunghi arbitrar cu notațiile obişnuite, $CD=h$ – înălțimea construită din vîrful C (fig. 9.43).

Considerăm sistemul cartezian de coordonate cu originea în punctul B, astfel încît semiaxa pozitivă a absciselor să coincidă cu semidreapta $[BA$.

Fie (x, y) coordonatele vîrfului C. Vîrful B are coordonatele $(0, 0)$, iar vîrful A – coordonatele $(c, 0)$.

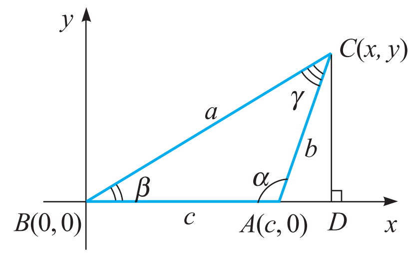


Fig. 9.43

În ΔACD avem:

$$AD=b\cos(180°-\alpha)=-b\cos\alpha,$$

$$CD=b\sin(180°-\alpha)=b\sin\alpha.$$

Prin urmare, $x=BA+AD=c-b\cos\alpha,$ $y=b\sin\alpha.$ Aplicînd formula distanței dintre două puncte, obținem:

$$a^2=BC^2=(c-b\cos\alpha)^2+(b\sin\alpha)^2=c^2-2bc\cos\alpha+b^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=$$
$$=c^2+b^2-2cb\cos\alpha.$$

În ΔCDB avem $x=BD=a\cos\beta,$ $y=CD=a\sin\beta$ şi

$$b^2=AC^2=(a\cos\beta-c)^2+(a\sin\beta)^2=a^2\cos^2\beta-2ac\cos\beta+c^2+a^2\sin^2\beta=$$
$$=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

În mod analog, considerînd sistemul de coordonate cu originea în vîrful C, obținem $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$

Astfel, am demonstrat

Teorema 30 (teorema cosinusului). În orice triunghi, pătratul lungimii oricărei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus produsul dublu dintre lungimile acestor două laturi şi cosinusul unghiului format de ele:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\angle A);$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\angle B);$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\angle C)$ (fig. 9.44).

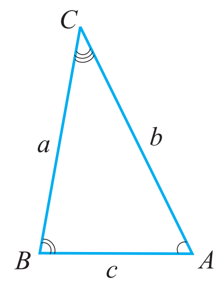


Fig. 9.44

Din această teoremă rezultă că:

a) dacă $a^2>b^2+c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi obtuz;

b) dacă $a^2<b^2+c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi ascuțit;

c) dacă $a^2=b^2+c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi drept.

Se observă că pentru $\alpha > 90°$ (fig. 9.43) proiecția laturii AC pe dreapta suport a laturii AB este $AD = -b\cos\alpha$ şi atunci $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ (11).

Pentru $\beta < 90°$, proiecția laturii BC pe dreapta suport a laturii AB este $BD = a\cos\beta$ şi atunci $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD$ (12).

Formulele (11), (12) constituie

Teorema 31 (teorema lui Pitagora generalizată). Pătratul lungimii unei laturi a oricărui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi plus/minus produsul dublu dintre lungimea uneia din aceste două laturi şi proiecția celeilalte laturi pe dreapta suport a primei.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că, în condiția teoremei sinusurilor, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 9.45).

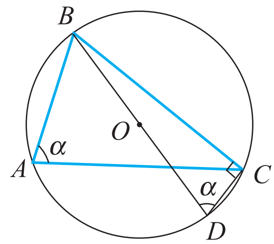


Fig. 9.45

Rezolvare:

Este suficient să demonstrăm că unul din aceste rapoarte este egal cu $2R$.

Fie, de exemplu, unghiul A ascuțit. Trasăm diametrul BD al cercului circumscris triunghiului ABC.
În acest caz, unghiul BDC are aceeaşi măsură α ca şi unghiul A. În triunghiul dreptunghic BCD avem $\frac{BC}{\sin\alpha} = BD$, adică $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, c.c.t.d.

2. Într-un cerc de rază $R = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ este înscris un triunghi cu două unghiuri de măsurile 15° şi 60° (fig. 9.46). Să se afle perimetrul triunghiului.

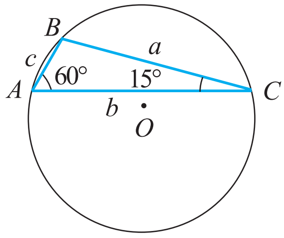


Fig. 9.46

Rezolvare:

Folosind notațiile obişnuite şi aplicînd teorema sinusurilor, obținem:

$$a = 2R\sin 60°,$$
$$b = 2R\sin(180° - 75°) = 2R\sin 75°,$$
$$c = 2R\sin 15°.$$

De aici, $\mathscr{P}_{ABC} = 2R(\sin 60° + \sin 75° + \sin 15°) = 2R(\sin 60° + 2\sin 45° \cos 30°) =$

$$= 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = R(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 3.$$

Răspuns: $\mathscr{P}_{ABC} = 3$.

3. Să se demonstreze că suma pătratelor laturilor oricărui paralelogram este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

Rezolvare:

Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle A) = \alpha$ (fig. 9.47). Atunci $m(\angle B) = 180° - \alpha$. Scriem teorema cosinusului pentru triunghiurile ABD şi ABC:

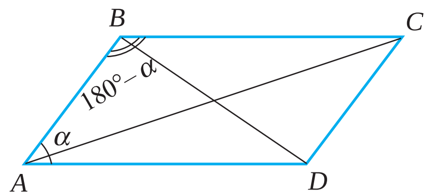


Fig. 9.47

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\alpha,\quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180° - \alpha).$

Adunînd aceste egalităţi membru cu membru şi ţinînd cont de egalitatea $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, obţinem că $BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AB^2 + BC^2$, adică $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, c.c.t.d.

Probleme propuse

B

1. Laturile paralelogramului sînt de $\sqrt{3}$ cm şi $\sqrt{7}$ cm, iar o diagonală este de 2 cm. Să se determine lungimea celeilalte diagonale.
2. Într-un cerc de rază 10 cm este înscris un triunghi cu două unghiuri de 60° şi 15°. Să se afle aria triunghiului.
3. Două laturi ale unui triunghi sînt de 2 m şi 3 m, iar sinusul unghiului format de ele este $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Să se calculeze lungimea laturii a treia.
4. Distanţele de la centrul cercului înscris într-un triunghi dreptunghic pînă la vîrfurile unghiurilor ascuţite sînt de $\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{10}$ cm. Să se afle măsurile unghiurilor ascuţite.
5. Un triunghi are laturile de 4 m, 5 m şi 6 m. Să se determine lungimile proiecţiilor laturilor de 4 m şi 5 m pe latura a treia.
6. O latură a unui triunghi este de 3 cm, unul din unghiurile alăturate acestei laturi este de 120°, iar latura opusă acestui unghi este de 7 cm. Să se afle lungimea laturii a treia.
7. Să se determine lungimea medianei triunghiului ABC corespunzătoare laturii opuse vîrfului C, dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.
8. Înălţimea şi mediana unui triunghi împart unghiul din care sînt construite în trei unghiuri congruente. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, dacă mediana este de 5 cm.
9. Lungimile laturilor unui triunghi cu un unghi de 120° sînt termenii unei progresii aritmetice. Să se afle lungimile acestor laturi, ştiind că cea mai mare dintre ele este de 7 cm.
10. Printr-un vîrf al unui pătrat cu latura a, prin mijlocul unei laturi care nu conţine acest vîrf şi prin centrul pătratului este construit un cerc. Să se determine raza acestui cerc.
11. Aria triunghiului ABC este egală cu 14 cm^2, $AC = 7$ cm, $BC = 5$ cm şi unghiul C este obtuz. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului.

6.3. Cercul şi discul

Cerc de centru O şi rază R, $R > 0$, se numeşte mulţimea punctelor planului situate la distanţa R de punctul O.
Se notează $\mathscr{C}(O, R)$ (fig. 9.48 a)).

Discul de centru O şi rază R, $R > 0$, este format din mulţimea punctelor planului a căror distanţă pînă la O nu întrece R.
Se notează $\mathscr{D}(O, R)$ (fig. 9.48 b)).

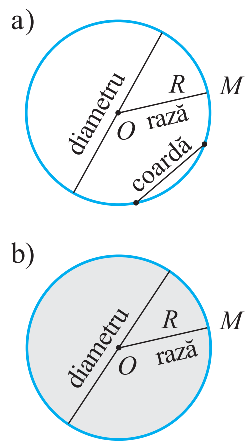
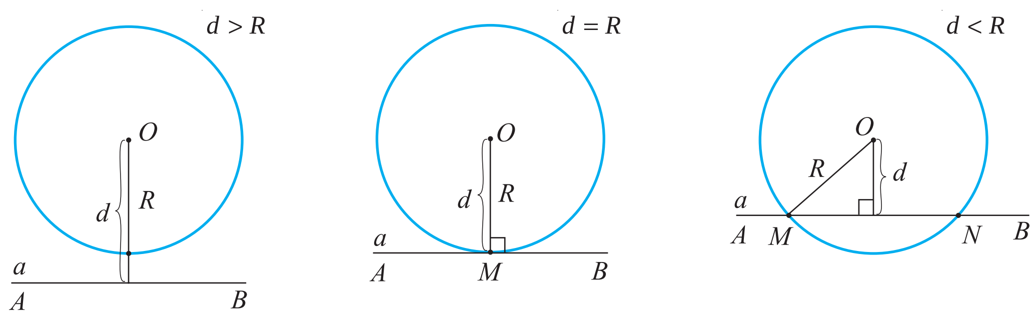


Fig. 9.48

Mulţimea punctelor planului situate de la centrul O la distanţa mai mică/mare decît raza cercului R se numeşte ***interiorul/exteriorul cercului*** $\mathscr{C}(O, R)$.

Poziţiile relative ale dreptei a faţă de cercul $\mathscr{C}(O, R)$ sînt reprezentate în figura 9.49. Dreapta a este:



a) ***exterioară cercului***

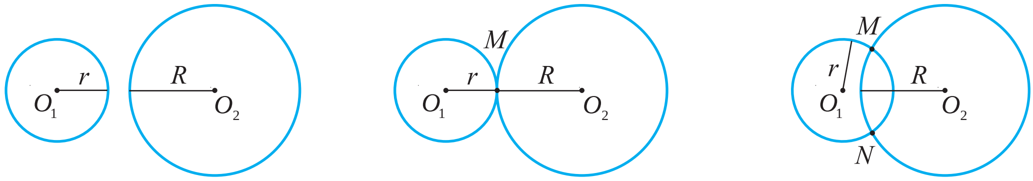
b) ***tangentă cercului*** *în punctul M*

c) ***secantă cercului*** *în punctele M, N*

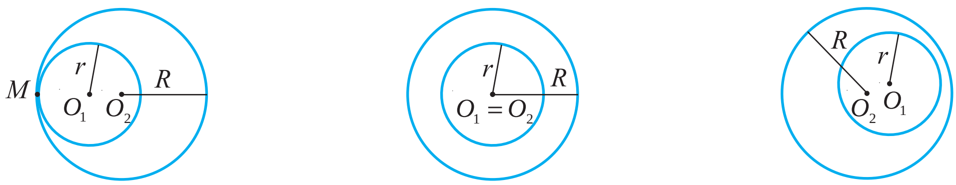
Fig. 9.49

Dacă dreapta a este tangentă la cercul $\mathscr{C}(O, R)$ în punctul M, atunci (fig. 9.49 b)):
1) punctul M este unicul punct comun al dreptei şi cercului;
2) dreapta a este perpendiculară pe raza OM în punctul M;
3) distanţa de la centrul O la dreapta a este egală cu raza R ($d = R$).

Pozițiile relative a două cercuri sînt reprezentate în figura 9.50. Cercurile $\mathscr{C}(O_1, r)$ și $\mathscr{C}(O_2, R)$ sînt:



a) ***exterioare***   b) ***tangente exterior*** *în punctul M*   c) ***secante*** *în punctele M și N*



d) ***tangente interior*** *în punctul M*   e) ***concentrice***   f) ***primul interior celui de al II-lea, al II-lea exterior primului***

Fig. 9.50

Teorema 32. Cele două tangente (luate ca segmente) construite la cerc din același punct exterior cercului au lungimi egale. Bisectoarea unghiului format de aceste tangente trece prin centrul cercului (fig. 9.51).

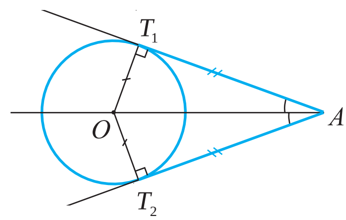


Fig. 9.51

Exercițiu. Demonstrați teorema 32.

Teorema 33 (puterea punctului în raport cu cercul). Fie un cerc, un punct M, o dreaptă ce trece prin punctul M și intersectează cercul în punctele A și B. Atunci produsul $AM \cdot MB$ nu depinde de alegerea dreptei (fig. 9.52).

Demonstrație:

1) Considerăm cazul cînd punctul M nu aparține cercului, adică se află sau în interiorul cercului (fig. 9.52 a)), sau în exteriorul lui (fig. 9.52 b)).

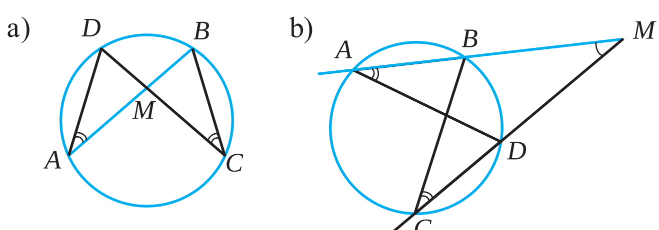


Fig. 9.52

Ducem prin punctul M două drepte: prima intersectează cercul în punctele A și B, iar a doua – în punctele C și D. Construim segmentele BC și AD și obținem că $\Delta ADM \sim \Delta CBM$. Din proporționalitatea laturilor acestor triunghiuri rezultă că $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{DM}{MB} \Rightarrow AM \cdot MB = MC \cdot DM$.

2) Dacă punctul M este situat pe cerc (fig. 9.53), atunci acest punct este o extremitate a coardei, adică punctul M împarte coarda în două segmente, dintre care unul este nul.

În acest caz, $AM \cdot MB = MM \cdot AB = 0 \cdot AB = 0.$ ▶

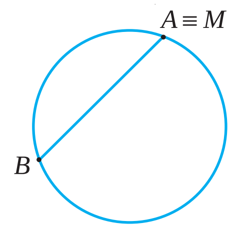


Fig. 9.53

Produsul $AM \cdot MB$ se numeşte ***puterea*** punctului în raport cu cercul dat.

Probleme rezolvate

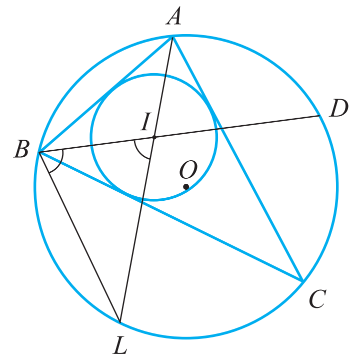


Fig. 9.54

1. Fie punctul I centrul cercului înscris în ΔABC, punctul L – intersecția dreptei suport a bisectoarei unghiului A cu cercul circumscris triunghiului ABC. Să se arate că $BL = IL = LC$ (fig. 9.54).

Rezolvare:

Cum $[AL$ este bisectoare, rezultă: $\smile BL \equiv \smile LC$ (13) şi $BL = LC$ (13′). Demonstrăm că $\angle LBI \equiv \angle BIL$.

Într-adevăr, $\angle LBI \equiv \angle LBD$, iar $\angle LBD$ este înscris în cerc, deci

$$\mathrm{m}(\angle LBD) = \frac{\mathrm{m}(\smile LCD)}{2} = \frac{\mathrm{m}(\smile LC) + \mathrm{m}(\smile CD)}{2}. \quad (14)$$

Unghiul BIL are vîrful în interiorul cercului circumscris triunghiului ABC, deci

$$\mathrm{m}(\angle BIL) = \frac{\mathrm{m}(\smile BL) + \mathrm{m}(\smile AD)}{2}. \qquad (15)$$

Cum $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC, rezultă că $\smile AD \equiv \smile DC$ (16).

Din egalitățile (13)–(16) rezultă că $\mathrm{m}(\angle LBI) = \mathrm{m}(\angle BIL)$, deci triunghiul BIL este isoscel, cu $BL = LI$. Din ultima egalitate şi din (13′) obținem c.c.t.d.

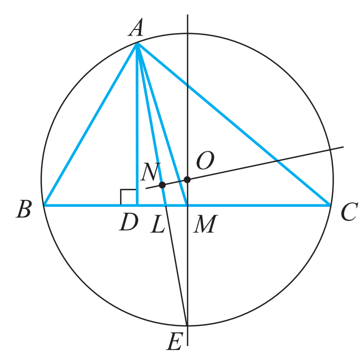


Fig. 9.55

2. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau înălțimea h_a, bisectoarea l_a şi mediana m_a, construite din acelaşi vîrf (fig. 9.55).

Analiză. Admitem că triunghiul ABC este construit, iar $[AD]$, $[AL]$ şi $[AM]$ sînt înălțimea, bisectoarea şi respectiv mediana, construite din vîrful A.

Conform condiției problemei, se pot construi triunghiurile ADL şi ADM (ca triunghiuri dreptunghice, fiind date o catetă şi ipotenuza). Mediatoarea laturii BC intersectează dreapta suport a bisectoarei AL într-un punct E al cercului circumscris triunghiului ABC. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este punctul O de intersecție a mediatoarelor segmentelor AE şi BC. Vîrfurile B şi C ale triunghiului căutat sînt punctele de intersecție a cercului $\mathscr{C}(O, OA)$ cu dreapta suport a segmentului DM.

Construcţie. Construim triunghiurile dreptunghice ADL şi ADM, astfel încît $AD = h_a$, $AL = l_a$, $AM = m_a$. Prin punctul M construim o dreaptă perpendiculară pe dreapta DM şi determinăm punctul E de intersecţie a acestei perpendiculare cu dreapta suport a bisectoarei AL. Punctul O de intersecţie a perpendicularei ME şi a mediatoarei segmentului AE este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, deci punctele B şi C de intersecţie a cercului $\mathscr{C}(O, OA)$ cu dreapta suport a segmentului DM sînt celelalte două vîrfuri ale triunghiului căutat.

Demonstraţie. Este evident că triunghiul construit este cel căutat, deoarece triunghiul construit are $AD = h_a$, $AL = l_a$, $AM = m_a$.

Discuţii. Din analiză, rezultă că punctele A şi E sînt situate în semiplane diferite, determinate de dreapta BC. Cum $AD \parallel ME$, rezultă că dreapta suport a bisectoarei AE va intersecta segmentul DM, deci bisectoarea unghiului unui triunghi este situată în interiorul unghiului format de înălţimea şi mediana construite din acelaşi vîrf.

Probleme propuse

A

1. Două cercuri de raze 15 cm şi 25 cm sînt tangente exterior. Să se afle distanţa dintre centrele cercurilor.

2. Două cercuri de raze 18 cm şi 30 cm sînt tangente interior. Să se determine distanţa dintre centrele cercurilor.

3. Punctele A, B, C aparţin unui cerc de rază 18 cm. Să se calculeze lungimea coardei AC, dacă măsura unghiului ABC este de 30°.

4. Pe un cerc se dau punctele A, B, C şi D. Ştiind că $m(\angle ABD) = 50°$, să se determine măsura unghiului ACD.

5. Coardele AC şi BD ale unui cerc se intersectează în punctul E. Ştiind că $AC = 20$ cm, $BE = 6$ cm şi că $AE : EC = 2 : 3$, să se calculeze lungimea segmentului ED.

6. Fie un cerc ale cărui coarde AD şi BC se intersectează. Ştiind că $m(\angle ABC) = 40°$, $m(\angle ACD) = 100°$, să se afle măsura unghiului CAD.

B

7. Să se arate că mediana corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic împarte triunghiul în două triunghiuri isoscele.

8. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Prin punctul A este construită o dreaptă care intersectează cercurile în punctele C şi D. Să se arate că măsura unghiului CBD este o mărime constantă pentru orice dreaptă ce trece prin punctul A.

9. Să se arate că o dreaptă ce trece prin punctul de tangenţă a două cercuri tangente exterior le împarte astfel încît arcele situate în semiplane diferite, mărginite de dreaptă, au aceleaşi măsuri.

10. Prin punctul A de tangență a două cercuri tangente exterior trec două drepte care intersectează primul cerc în punctele C şi B, iar cercul al doilea – în punctele D şi E. Să se arate că triunghiurile cu vîrfurile A, B, C şi A, D, E sînt asemenea şi că $DE \parallel BC$.

11. Din punctul A, exterior unui cerc, sînt construite două tangente la cerc în punctele de tangență B şi C. La arcul BC, situat în interiorul triunghiului ABC, este construită o tangentă, care intersectează segmentele AB şi AC în punctele B_1 şi respectiv C_1. Să se arate că perimetrul triunghiului AB_1C_1 este egal cu $2AB$ şi nu depinde de poziția punctului de tangență pe arcul BC.

12. Fie triunghiul ABC cu înălțimile AA_1 şi BB_1 şi punctul O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Să se arate că:
a) patrulaterul AB_1A_1B este inscriptibil;
b) dreapta OC este perpendiculară pe dreapta A_1B_1.

13. Două cercuri sînt tangente exterior în punctul A. La cercuri este construită o tangentă comună exterioară în punctele de tangență B şi C. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

14. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu înălțimea AA_1 şi centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că $\angle BAA_1 \equiv \angle OAC$.

15. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Din punctul C, situat pe dreapta AB şi care nu aparține segmentului AB, sînt construite două tangente la cercurile date în punctele D şi E. Să se arate că segmentele CE şi CD sînt congruente.

16. Două cercuri de raze R şi r sînt tangente exterior. Să se afle măsura unghiului format de tangentele comune exterioare construite la aceste cercuri.

17. Lungimile bazelor unui trapez sînt a şi b $(b > a)$, iar suma măsurilor unghiurilor alăturate unei baze este de $90°$. Să se afle lungimea segmentului determinat de mijloacele bazelor.

18. Două cercuri de raze R şi r sînt tangente exterior. Să se afle distanța dintre punctele de tangență a tangentei comune exterioare cu aceste cercuri.

19. Fie punctele A şi B şi unghiul φ. Să se construiască mulțimea punctelor M din plan, astfel încît $\mathrm{m}(\angle AMB) = \varphi$. (Se mai spune că *segmentul AB se vede sub un unghi de măsură* φ.)

20. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se cunosc elementele a, h_a, $\angle A$.

21. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau elementele a, h_a, R, unde R este raza cercului circumscris acestui triunghi.

22. Punctele de intersecție a cercului circumscris triunghiului ABC cu dreptele suport ale înălțimii, bisectoarei şi medianei triunghiului ABC construite din acelaşi vîrf sînt punctele necoliniare P, L şi M. Să se construiască triunghiul ABC.

23. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se cunosc elementele a, $\angle A$ şi r, unde r este raza cercului înscris în acest triunghi.

24. Să se construiască triunghiul ABC, dacă se dau elementele a, b, R, unde R este raza cercului circumscris acestui triunghi.

§ 7 Poligoane. Poligoane regulate

Definiție. Se numește **linie frîntă** $A_1A_2A_3...A_n$ reuniunea segmentelor $[A_1A_2]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, unde punctele A_i, A_{i+1}, A_{i+2} nu sînt coliniare pentru toți $i \in \{1, 2, 3, ..., n-2\}$ (fig. 9.56).

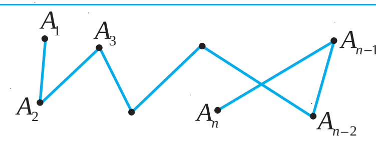


Fig. 9.56

Punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ se numesc ***vîrfuri*** sau ***extremități*** ale liniei frînte, iar segmentele $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ se numesc ***laturi*** ale liniei frînte. Laturile liniei frînte se numesc ***laturi adiacente***, dacă ele au un vîrf comun, și – ***neadiacente***, în caz contrar.

Linia frîntă se numește linie frîntă ***simplă*** dacă oricare două laturi neadiacente ale ei nu au nici un punct comun (fig. 9.57).

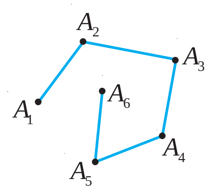


Fig. 9.57

Dacă vîrfurile A_1, A_{n-1} și A_n ale liniei frînte $A_1A_2A_3...A_n$ sînt necoliniare, atunci reuniunea acestei linii frînte cu segmentul $[A_1A_n]$ se numește ***linie frîntă închisă*** și se notează, de asemenea, $A_1A_2A_3...A_n$ (fig. 9.58).

O linie frîntă închisă simplă determină în plan trei mulțimi disjuncte: linia frîntă, ***interiorul*** liniei frînte, ***exteriorul*** liniei frînte. Orice segment (E_1E_2) determinat de un punct din interiorul liniei frînte și un punct din exteriorul ei intersectează linia frîntă (fig. 9.58).

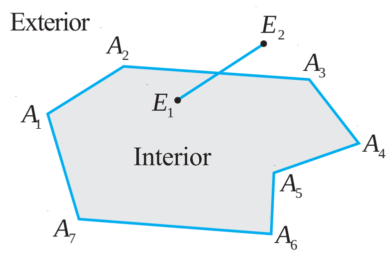
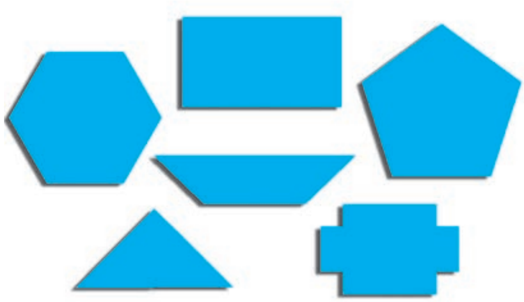


Fig. 9.58



O linie frîntă închisă simplă se numește ***poligon***. Vîrfurile și laturile liniei frînte se numesc ***vîrfuri*** și respectiv ***laturi*** ale poligonului.

Un poligon se numește ***poligon convex*** dacă el este situat în același semiplan închis determinat de dreapta suport a oricărei laturi a poligonului (fig. 9.59 a), b)). În caz contrar, poligonul se numește ***neconvex*** (fig. 9.59 c), d)).

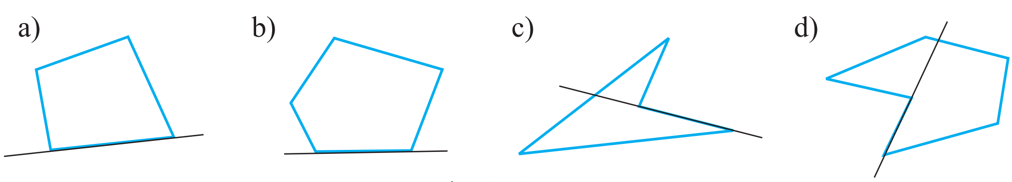


Fig. 9.59

Reuniunea poligonului şi a interiorului său se numeşte ***suprafață poligonală***.

Se numeşte ***unghi interior*** al poligonului convex unghiul format de semidreptele suport ale două laturi adiacente. Unghiul adiacent suplementar unui unghi interior al poligonului se numeşte ***unghi exterior*** al poligonului convex. Segmentele determinate de vîrfurile care nu sînt extremități ale aceleiaşi laturi se numesc ***diagonale*** ale poligonului.

Numărul de laturi ale poligonului este egal cu numărul de unghiuri (vîrfuri), de aceea poligoanele se numesc după numărul de unghiuri sau numărul de laturi. De exemplu: ***triunghi***, ***patrulater***, ***pentagon***, ***hexagon*** etc.

Definiție. Un poligon convex se numeşte **poligon regulat** dacă el are toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente.

Cele mai simple poligoane regulate sînt triunghiul echilateral şi pătratul.

Din fiecare vîrf al poligonului convex cu n laturi pot fi construite $n-3$ diagonale care împart poligonul în $(n-2)$ triunghiuri (fig. 9.60). Cum suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu 180°, rezultă că suma S_n a măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$, adică $S_n = 180°(n-2)$.

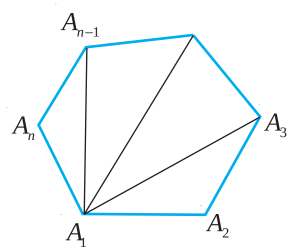


Fig. 9.60

Prin urmare, *măsura* β_n *a unghiului interior al unui poligon regulat cu n laturi* se calculează folosind formula $\boxed{\beta_n = \frac{180°(n-2)}{n}}$.

Definiții. • Poligonul convex se numeşte **înscris în cerc** dacă vîrfurile lui sînt situate pe cerc.

• Poligonul convex se numeşte **inscriptibil** dacă el poate fi înscris într-un cerc.

• Poligonul convex se numeşte **circumscris** unui cerc dacă laturile lui sînt tangente la cerc.

• Poligonul convex se numeşte **circumscriptibil** dacă el poate fi circumscris unui cerc.

Teorema 34. Dacă $A_1A_2A_3...A_n$ este poligon regulat, atunci el este:
1) înscriptibil (fig. 9.61 a)),
2) circumscriptibil (fig. 9.61 b)).

Demonstrație:

1) Considerăm cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$. Fie punctul O centrul acestui cerc. Vom arăta că vîrful A_4 este situat pe acest cerc. Într-adevăr, cum triunghiurile isoscele OA_1A_2

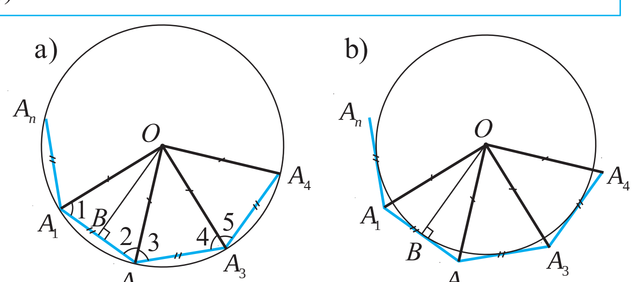


Fig. 9.61

şi OA_2A_3 sînt congruente (criteriul LLL), rezultă că

$$\mathrm{m}(\angle 1)=\mathrm{m}(\angle 2)=\mathrm{m}(\angle 3)=\mathrm{m}(\angle 4)=\mathrm{m}(\angle 5)=\frac{\beta_n}{2}.$$

Prin urmare, $\Delta OA_3A_4 \equiv \Delta OA_2A_3$ (criteriul LUL), adică $OA_4=OA_3=OA_2=OA_1$, ceea ce demonstrează că A_4 este situat pe acelaşi cerc cu punctele A_1, A_2, A_3. În mod analog se demonstrează că cercul $\mathscr{C}(O, OA_1)$ trece şi prin celelalte vîrfuri ale poligonului $A_1A_2A_3...A_n$.

2) În 1) am arătat că laturile poligonului regulat $A_1A_2A_3...A_n$ sînt coarde congruente ale cercului $\mathscr{C}(O, OA_1)$. Prin urmare, ele se află la aceeaşi distanţă de centrul O al cercului, adică ele sînt tangente cercului de centru O şi rază OB, unde $OB \perp A_1A_2$ (fig. 9.61 b)).

Deci, poligonul $A_1A_2A_3...A_n$ este circumscris cercului $\mathscr{C}(O, OB)$. ▶

Corolar. Centrul cercului înscris în poligonul regulat coincide cu centrul cercului circumscris acestui poligon (fig. 9.62).

Centrul comun al acestor cercuri se numeşte ***centru*** (***centru de rotaţie, centru de simetrie***) ***al poligonului regulat***.

Raza cercului circumscris se numeşte ***rază a poligonului regulat***, iar raza cercului înscris se numeşte ***apotemă a poligonului regulat***. Unghiul AOB cu vîrful în centrul poligonului, unde A şi B sînt extremităţile unei laturi a poligonului, se numeşte ***unghi la centru al poligonului regulat*** (fig. 9.62). Măsura acestui unghi este $\alpha_n=\frac{360°}{n}$, unde n este numărul de laturi ale poligonului regulat.

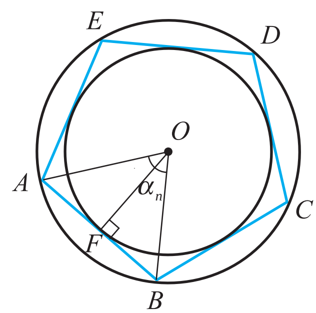


Fig. 9.62

Patrulatere înscrise şi circumscrise

Amintim că unghiul cu vîrful situat pe un cerc şi ale cărui laturi intersectează cercul se numeşte ***unghi înscris în cerc*** (fig. 9.63).

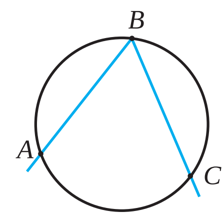


Fig. 9.63

Teorema 35. Măsura unghiului înscris într-un cerc este egală cu jumătatea măsurii arcului cuprins între laturile lui. $\mathrm{m}(\angle ABC)=\frac{1}{2}\mathrm{m}(\smile AC)$ (fig. 9.63).

Teorema 36. Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca suma măsurilor unghiurilor opuse să fie egală cu 180° (fig. 9.64 a)).

Teorema 37. Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca unghiul format de o diagonală şi o latură să fie congruent cu unghiul format de latura opusă şi cealaltă diagonală (fig. 9.64 b)).

Teorema 38. Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca un unghi interior să fie congruent cu unghiul exterior de la vîrful opus acestuia (fig. 9.64 c)).

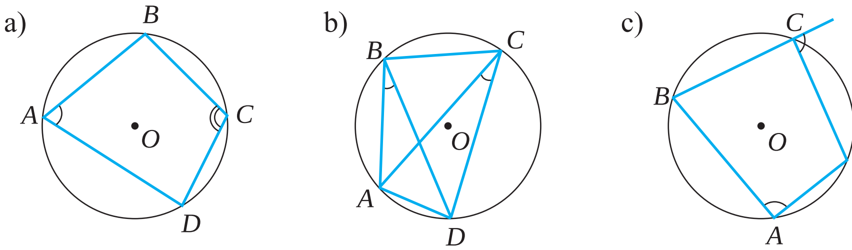


Fig. 9.64

Teorema 39. Un patrulater poate fi circumscris unui cerc dacă şi numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sînt egale: $AB + CD = AD + BC$ (fig. 9.65).

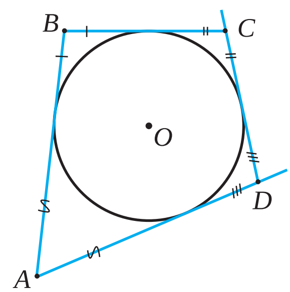


Fig. 9.65

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 35–39.

Probleme rezolvate

1. Să se exprime lungimea a_n a laturii unui poligon regulat cu n laturi prin raza R a cercului circumscris.

Rezolvare:

În ΔAOB avem $m(\angle AOD) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180°}{n}$ (fig. 9.66).

$a_n = AB = 2AD = 2R\sin\frac{180°}{n}$. În particular,

$a_3 = 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$, $a_4 = 2R\sin 45° = R\sqrt{2}$, $a_6 = 2R\sin 30° = R$.

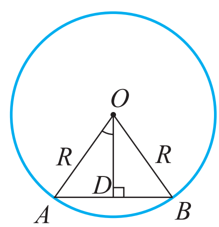


Fig. 9.66

Răspuns: $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$.

2. Să se exprime lungimea a_n a laturii unui poligon regulat prin raza r a cercului înscris în acest poligon.

Rezolvare:

În ΔOCE avem $m(EOC) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180°}{n}$ (fig. 9.67).

$a_n = CF = 2CE = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$. În particular,

$a_3 = 2r\,\mathrm{tg}60° = 2r\sqrt{3}$, $a_4 = 2r\,\mathrm{tg}45° = 2r$,

$a_6 = 2r\,\mathrm{tg}30° = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

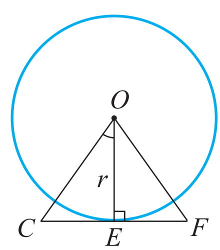


Fig. 9.67

Răspuns: $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$.

3. Cîte laturi are un poligon regulat, dacă fiecare unghi exterior al lui este de:
a) 9°; b) 40°?

Rezolvare:

Cum măsura unghiului interior al poligonului regulat cu *n* laturi este
$\beta_n = \frac{180°(n-2)}{n}$, obținem: $\beta_n = 180° - \frac{360°}{n} \Leftrightarrow 180° - \beta_n = \frac{360°}{n}$.

Dar $180° - \beta_n$ este măsura unghiului exterior al poligonului. Prin urmare:

a) $\frac{360°}{n} = 9° \Rightarrow n = 40$; b) $\frac{360°}{n} = 40° \Rightarrow n = 9$.

Răspuns: a) $n = 40$; b) $n = 9$.

Probleme propuse

A

1. Cîte laturi are un poligon regulat, dacă măsura fiecărui unghi interior al acestuia este de: a) 150°; b) 160°?

2. Cîte laturi are un poligon regulat, dacă măsura fiecărui unghi exterior al acestuia este de: a) 36°; b) 24°?

3. Să se exprime raza cercului înscris într-un triunghi echilateral prin raza cercului circumscris acestui triunghi.

4. Lungimea laturii unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este *a*. Să se afle lungimea laturii pătratului înscris în acest cerc.

B

5. Lungimea laturii unui poligon regulat cu *n* laturi este a_n. Să se exprime raza *R* şi apotema *r* ale acestui poligon prin a_n şi *n*.

6. Într-un cerc de rază 1 m este înscris un poligon regulat cu *n* laturi. Să se determine perimetrul $\mathscr{P}_n$ al poligonului pentru $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.

7. Un pătrat şi un triunghi echilateral sînt înscrise într-un cerc de rază 1 m, astfel încît o latură a pătratului este paralelă cu o latură a triunghiului. Să se afle aria părții comune a pătratului şi triunghiului.

8. Într-un cerc de rază 4 m este înscris un triunghi echilateral, iar pe latura acestuia este construit un pătrat. Să se calculeze raza cercului circumscris pătratului.

9. Să se circumscrie unui cerc un triunghi echilateral, un pătrat, un octagon regulat.

§ 8 Ariile figurilor plane

Definiție. Fiecărei figuri plane i se asociază un număr real nenegativ, numit **aria** figurii respective. Aria posedă următoarele proprietăți:

1° figurile congruente au arii egale;

2° dacă o figură este reuniunea a două figuri disjuncte, atunci aria figurii date este egală cu suma ariilor celor două figuri disjuncte;

3° pătratul cu latura de 1 u.l. are aria 1 u.p.

În baza acestei definiții se poate demonstra că aria oricărui dreptunghi (fig. 9.68) este egală cu produsul lungimilor a două laturi ce au un vîrf comun: $\mathscr{A} = a \cdot b$.

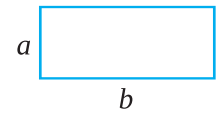
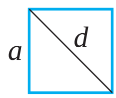
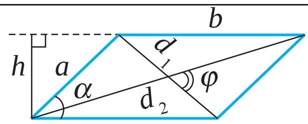
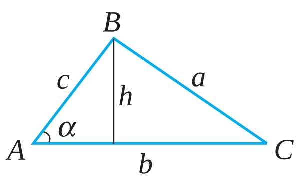
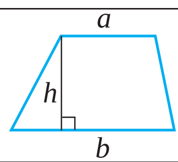
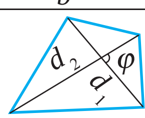
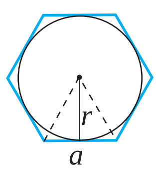
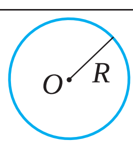
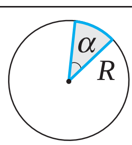


Fig. 9.68

Formulele pentru calculul ariilor unor figuri geometrice sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Figura	Reprezentarea geometrică	Formula
1	Pătrat		$\mathscr{A} = a^2 = \frac{1}{2} d^2$
2	Paralelogram		$\mathscr{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$
3	Triunghi		$\mathscr{A} = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} bc\sin\alpha = pr = \frac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, r – raza cercului înscris în ΔABC, R – raza cercului circumscris triunghiului ABC.
4	Trapez		$\mathscr{A} = \frac{a+b}{2} h$
5	Patrulater convex		$\mathscr{A} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$
6	Poligoane regulate		$\mathscr{A} = \frac{ar}{2} n = pr$, unde r – raza cercului înscris în poligonul regulat, $p = \frac{an}{2}$, p – semiperimetrul poligonului, iar n – numărul de laturi ale poligonului.
7	Disc		$\mathscr{A} = \pi R^2$
8	Sector de disc		$\mathscr{A} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ (α în radiani) $\mathscr{A} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360°}$ (α în grade)

Probleme rezolvate

1. Punctul de tangență a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de lungimi m şi n. Să se afle aria triunghiului (fig. 9.69).

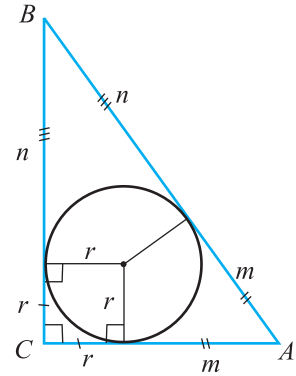


Fig. 9.69

Rezolvare:

Conform teoremei lui Pitagora,

$(r+m)^2+(r+n)^2=(m+n)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2+2r(m+n)+m^2+n^2=m^2+n^2+2mn \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2+r(m+n)=mn.$

Atunci $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(r+m)(r+n)=$

$=\frac{1}{2}(r^2+r(m+n)+mn)=\frac{1}{2}(mn+mn)=mn$ (u.p.).

2. Să se arate că medianele oricărui triunghi îl împart în şase triunghiuri echivalente (de arii egale).

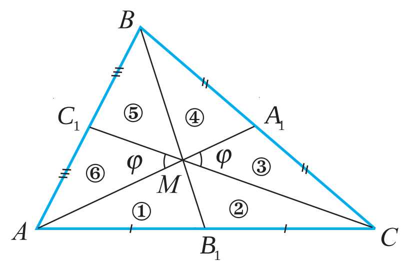


Fig. 9.70

Rezolvare:

Notăm cele şase triunghiuri cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 (fig. 9.70).

Triunghiurile 1 şi 2 au arii egale, deoarece $AB_1=B_1C$ şi au aceeaşi înălțime construită din M (punctul de intersecție a medianelor). În mod analog, triunghiurile 3 şi 4, precum şi 5 şi 6, au arii egale.

Vom arăta, de exemplu, că triunghiurile 3 şi 6 au arii egale. Conform proprietății medianelor, $\frac{AM}{MA_1}=\frac{CM}{MC_1}=\frac{2}{1}\Rightarrow AM\cdot MC_1=CM\cdot MA_1$.

Unghiurile AMC_1 şi CMA_1 sînt opuse la vîrf, deci au aceeaşi măsură, fie φ.

Astfel, $\mathscr{A}_{AMC_1}=\frac{1}{2}AM\cdot MC_1\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}CM\cdot MA_1\cdot\sin\varphi=\mathscr{A}_{CMA_1}$.

Analog să demonstrează că triunghiurile 1 şi 4 sînt echivalente, iar de aici rezultă afirmația problemei.

3. Fie ΔABC cu $AC=20$ cm. Ştiind că medianele corespunzătoare celorlalte două laturi sînt de 24 cm şi 18 cm, să se afle aria triunghiului ABC.

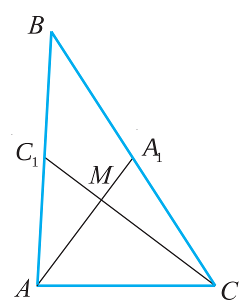


Fig. 9.71

Rezolvare:

Fie $AA_1=18$ cm, $CC_1=24$ cm, M punctul de intersecție a medianelor (fig. 9.71). Conform proprietății medianelor,

$AM=\frac{2}{3}AA_1=12$ (cm), $CM=\frac{2}{3}CC_1=16$ (cm).

Observăm că ΔAMC este dreptunghic, deci

$\mathscr{A}_{AMC}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16=96$ (cm^2), iar

$\mathscr{A}_{ABC}=3\mathscr{A}_{AMC}=3\cdot 96=288$ (cm^2) (a se vedea problema 2).

4. Diagonalele trapezului $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ îl împart în patru triunghiuri cu un vîrf comun O. Ştiind că ariile triunghiurilor AOD şi BOC sînt $\mathcal{A}_1$ şi respectiv $\mathcal{A}_2$, să se afle aria trapezului (fig. 9.72).

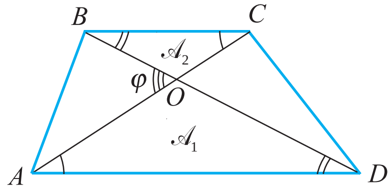


Fig. 9.72

Rezolvare:

Cum $\Delta AOD \sim \Delta COB,$ rezultă că

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO} = \frac{OB}{OD} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \quad \text{(asemănare de coeficient } \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\text{)}.$$

Fie $m(\angle AOB) = \varphi$.

Atunci $CO \cdot OD = AO \cdot OB \;\; \Rightarrow \mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\varphi = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\varphi = \mathcal{A}_{COD}$.

Cum $OB = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \cdot OD,$ obţinem că $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\varphi = \frac{1}{2} AO \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \cdot OD \sin\varphi =$

$$= \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \cdot \mathcal{A}_1 = \sqrt{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + 2\sqrt{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2} = (\sqrt{\mathcal{A}_1} + \sqrt{\mathcal{A}_2})^2$.

Probleme propuse

A

1. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic se raportă ca $3:4$, iar lungimea ipotenuzei este de 50 cm. Să se determine aria triunghiului.

2. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de 5 cm şi 12 cm. Să se afle aria triunghiului.

3. Să se determine aria unui triunghi echilateral cu lungimea laturii de $4 \cdot \sqrt[4]{3}$ cm.

4. Diagonalele unui romb sînt de 8 cm şi 15 cm. Să se afle aria rombului.

5. Perimetrul unui paralelogram este de 72 cm. Lungimile laturilor lui se raportă ca $5:7$, iar măsura unghiului ascuţit este de 30°. Să se afle aria paralelogramului.

6. Diagonalele unui trapez isoscel sînt perpendiculare, iar lungimea liniei mijlocii este de 12 cm. Să se afle aria trapezului.

7. Din punctul A al unui cerc sînt construite coardele AB şi AC, astfel încît $AB = AC = 2\sqrt{3}$ cm, iar $m(\angle BAC) = 60^\circ$. Să se afle aria discului mărginit de acest cerc.

B

8. Să se determine aria unui romb, dacă lungimea laturii lui este a, iar suma lungimilor diagonalelor lui este d.

9. Diagonala unui trapez isoscel este bisectoare a unghiului obtuz. Perimetrul trapezului este de 22 cm, iar lungimea bazei mari este de 6 cm. Să se determine aria trapezului.

10. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 5$ m, $AC = 3$ m, $BC = 4$ m. Să se afle ariile triunghiurilor ACD şi ADB, dacă AD este bisectoare.

11. Într-un trapez isoscel se poate înscrie un cerc. Linia mijlocie, de 10 m, împarte trapezul în două figuri, ale căror arii se raportă ca $2:3$. Să se determine aria trapezului.

12. Piciorul înălțimii paralelogramului $ABCD$, construită din vîrful B, împarte latura AD în jumătate. Să se afle aria paralelogramului, dacă perimetrul lui este de 24 cm, iar perimetrul triunghiului ABD este de 18 cm.

13. Diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ sînt perpendiculare şi au lungimile a şi b. Să se afle aria patrulaterului $EFGH$, unde E, F, G şi H sînt mijloacele laturilor AB, BC, CD şi respectiv DA.

14. Punctul M este mijlocul laturii BC a paralelogramului $ABCD$. Dreapta AM intersectează diagonala BD în punctul E. Să se determine ariile triunghiurilor ABE şi AED, dacă aria triunghiului BEM este egală cu 1 u.p.

15. O diagonală a unui trapez dreptunghic are lungimea d şi îl împarte în două triunghiuri dreptunghice isoscele. Să se afle aria trapezului.

16. Centrul cercului înscris într-un trapez dreptunghic este situat la distanțele de 1 dm şi 2 dm de capetele unei laturi neparalele. Să se determine aria trapezului.

Probleme recapitulative

A

1. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 112 cm, iar ipotenuza sa este de 113 cm. Să se determine aria triunghiului.

2. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic formează o progresie aritmetică cu rația 3. Să se afle lungimea ipotenuzei.

3. Bisectoarea unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic împarte cateta opusă în segmente cu lungimea de 4 cm şi 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

4. Laturile congruente ale unui triunghi isoscel au lungimea de 4 cm, iar medianele corespunzătoarelor lor sînt de 3 cm. Să se afle lungimea bazei triunghiului.

5. Să se afle raportul dintre raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic isoscel şi înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

6. Două vîrfuri ale unui pătrat sînt situate pe un cerc de rază 17 cm, iar celelalte două sînt situate pe o tangentă la acest cerc. Să se afle lungimea diagonalei pătratului.

7. Înălțimea dusă din vîrful unghiului obtuz al unui romb împarte latura lui în jumătate. Să se afle măsurile unghiurilor rombului.

8. Coarda comună a două cercuri de raze egale are lungimea de 12 cm şi este o diagonală a rombului înscris în intersecția acestor cercuri. Cealaltă diagonală a rombului are lungimea de 6 cm. Să se afle razele cercurilor.

9. Într-un romb cu un unghi cu măsura de 30° este înscris un cerc, iar în cerc este înscris un pătrat. Să se afle raportul dintre aria rombului şi aria pătratului.

10. Lungimile laturilor respective ale unui paralelogram şi ale unui dreptunghi sînt egale. Aria paralelogramului este de două ori mai mică decît aria dreptunghiului. Să se afle măsura unghiului obtuz al paralelogramului.

11. Bazele unui trapez isoscel sînt de 5 cm şi 12 cm, iar latura neparalelă este de 12,5 cm. Să se afle înălțimea trapezului.

12. Laturile neparalele AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se prelungesc pînă la intersecția în punctul E. Se ştie că $AB = 2$ cm, $BE = 4$ cm, $EC = 6$ cm. Să se afle CD.

13. Suma măsurilor unghiurilor alăturate bazei mari a unui trapez este egală cu 90°. Baza mare este de 20 cm, iar cea mică – de 4 cm. Să se afle distanța dintre mijloacele bazelor.

14. Proiecția diagonalei unui trapez isoscel pe baza mare este de 7 cm, iar înălțimea lui este de 4 cm. Să se afle aria trapezului.

15. Distanța de la centrul cercului pînă la o coardă este de 5 cm, iar raza cercului este de 13 cm. Să se afle lungimea coardei.

16. Două cercuri de aceeaşi rază 7 cm şi sînt tangente exterior. O dreaptă intersectează cercurile în punctele A, B, C şi D, astfel încît $AB = BC = CD$. Să se afle AB.

17. Din punctul A, situat în exteriorul unui cerc de rază 8 cm, este dusă o secantă de lungimea 10 cm, care este împărțită de cerc în două segmente de aceeaşi lungime. Să se afle distanța de la punctul A pînă la centrul cercului.

B

18. Ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC este de 9 cm, iar o catetă a sa – de 6 cm. Din vîrful C al unghiului drept se duc mediana CM şi înălțimea CD. Să se afle MD.

19. În triunghiul dreptunghic ABC, $BC = 8$ cm, $AB = 10$ cm. Pe prelungirea catetei AC după punctul C se ia punctul D, astfel încît punctul C se află între A şi D. Să se afle DB, dacă $DB = DA$.

20. Înălțimea corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel este de 20 cm, iar înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sînt de 24 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

21. Într-un triunghi dreptunghic este înscris un semicerc, astfel încît ipotenuza conține diametrul cercului, iar centrul împarte ipotenuza în segmente de 3 cm şi 4 cm. Să se afle raza semicercului şi lungimile laturilor triunghiului.

22. Raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic este egală cu r, iar raza cercului circumscris triunghiului – cu R. Să se afle aria triunghiului.

23. Triunghiul dreptunghic ABC este împărțit de înălțimea CD, dusă din vîrful C al unghiului drept, în două triunghiuri: BCD şi ACD. Razele cercurilor înscrise în aceste triunghiuri sînt de 4 cm şi respectiv 3 cm. Să se afle raza cercului înscris în triunghiul ABC.

24. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Un cerc cu centrul pe cateta AC, tangent la ipotenuza AB, intersectează cateta BC în punctul D, astfel încît $BD : DC = 2 : 3$. Se ştie că $AC : BC = 12 : 5$. Să se afle raportul dintre raza cercului şi lungimea catetei BC.

25. Raza cercului înscris într-un triunghi isoscel are lungimea de 1,5 cm, iar a cercului circumscris – de $\frac{25}{8}$ cm. Să se afle lungimile laturilor, dacă ele se exprimă prin numere întregi.

26. Fie triunghiul echilateral ABC cu latura a. Se consideră cercul care are ca diametru înălțimea CD. Prin punctele A şi C se duc tangente la acest cerc, care se intersectează în punctul E. Să se afle perimetrul triunghiului ACE.

27. Medianele AA_1 şi BB_1 ale triunghiului isoscel ABC ($CA = CB$) se intersectează în punctul M. Raportul dintre raza cercului înscris în triunghiul AMB şi raza cercului înscris în patrulaterul MB_1CA_1 este egal cu $\frac{3}{4}$. Să se afle raportul $CB : AB$.

28. Înălțimea dusă din vîrful unui unghi alăturat bazei unui triunghi isoscel este de două ori mai mică decît lungimea laturii corespunzătoare. Să se afle măsurile unghiurilor acestui triunghi (să se analizeze ambele cazuri posibile).

29. Lungimile bazelor unui trapez sînt egale cu a şi b ($a > b$). Să se afle lungimea segmentului ce uneşte mijloacele diagonalelor trapezului.

30. Lungimile bazelor unui trapez sînt egale cu a şi b. O dreaptă paralelă cu bazele intersectează laturile neparalele, astfel încît trapezul este împărțit în două trapeze de arii egale. Să se afle lungimea segmentului acestei drepte, cuprins între laturile neparalele.

31. Două cercuri de raze r şi R sînt tangente exterior. O dreaptă intersectează aceste cercuri astfel încît cercurile determină pe dreaptă trei segmente congruente. Să se afle lungimile acestor segmente.

32. Să se afle măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, dacă raportul dintre raza cercului înscris în triunghi şi raza cercului circumscris este egal cu $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

33*. Cercul înscris în triunghiul ABC împarte mediana BB_1 ($B_1 \in AC$) în trei segmente congruente. Să se afle raportul lungimilor laturilor triunghiului ABC.

34*. Se consideră mulțimea triunghiurilor dreptunghice de aceeaşi arie $\mathcal{A}$. Să se determine triunghiurile din această mulțime ale căror cercuri circumscrise au arie minimă.

35*. Dintre toate triunghiurile cu aceeaşi latură şi acelaşi unghi α opus acestei laturi, să se determine cel care are perimetrul maxim.

36. Care este lungimea traiectoriei parcurse de extremitatea orarului de lungime 18 mm al unui ceasornic în: a) 1 oră; b) 24 de ore?

37. Care este lungimea traiectoriei parcurse de extremitatea minutarului de lungime 30 cm al unui ceasornic în: a) 1 oră; b) 12 ore; c) 24 de ore?

38. Un ciclist se deplasează pe o pistă circulară de rază 240 m. Într-un minut el parcurge 300 m. În cîte minute ciclistul va parcurge un cerc?

39. Un autoturism are lățimea de 1,2 m şi se deplasează pe o pistă circulară cu raza interioară de 100 m, păstrînd permanent distanța de 50 cm de la marginea pistei. Să se determine diferența dintre drumul parcurs de roțile exterioare şi cele interioare, dacă automobilul parcurge un cerc.

Proba de evaluare II

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

A

1. Două discuri de aceeaşi rază de 5 cm se intersectează. Aria reuniunii acestor discuri este de $44\pi\ \text{cm}^2$. Determinaţi aria intersecţiei discurilor. 1
2. Se dau vîrfurile $A(2, 1)$, $B(5, 3)$, $C(2, 4)$ ale unui paralelogram. Determinaţi coordonatele punctelor care pot fi al patrulea vîrf al paralelogramului. 2
3. Fie triunghiul ABC cu $BC = (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm, $m(\angle ABC) = 45°$, $m(\angle ACB) = 30°$. Aflaţi perimetrul triunghiului ABC. 2
4. Într-un cerc sînt construite coardele concurente AB şi CD. Măsurile unghiurilor ABC şi ACD sînt de 50° şi respectiv de 40°. Aflaţi măsura unghiului DAC. 1
5. Aflaţi lungimile laturilor neparalele şi ale diagonalelor trapezului înscris într-un cerc de rază 37,5 cm, dacă baza mică este de 51 cm, iar baza mare este diametrul cercului. 2
6. Unui cerc de rază 6 cm i se circumscrie un romb cu măsura unghiului ascuţit de 30°. Determinaţi aria rombului. 2

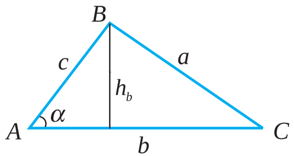
B

1. $ABCD$ este un paralelogram cu $AD = 3$ cm, $AB = 4$ cm, $m(\angle DAB) = 60°$. Pe laturile AB şi CB în exterior sînt construite triunghiurile echilaterale ABE şi CBF. Determinaţi aria triunghiului DEF. 1
2. Un cerc de lungime 12π cm este împărţit de punctele A, B, C în trei arce ale căror lungimi se raportă ca $1:2:3$. Determinaţi aria triunghiului ABC. 2
3. Lungimile laturilor unui triunghi sînt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu raţia 1. Cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului este egal cu $\frac{5}{13}$. Aflaţi aria triunghiului. 2
4. Demonstraţi că suma distanţelor de la orice punct situat pe o latură a unui triunghi echilateral pînă la celelalte două laturi este o mărime constantă. 1
5. Bazele unui trapez sînt de 4 cm şi 16 cm. Aflaţi raza cercului înscris în trapez şi raza cercului circumscris acestuia, dacă se ştie că ele există. 2
6. Într-un disc de rază R sînt construite două coarde paralele, astfel încît centrul cercului se află între coarde. Una din ele subîntinde un arc de 90°, iar cealaltă – un arc de 60°. Determinaţi aria părţii discului cuprinsă între coarde. 2

Figuri plane

Poligoane

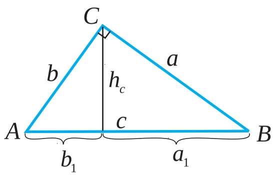
Triunghiuri



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$2p = a+b+c$

Triunghiul dreptunghic

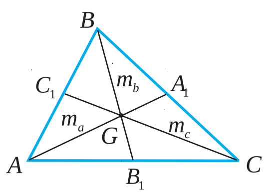


$a^2+b^2=c^2$

$a^2=ca_1$

$b^2=cb_1$

$h_c^2=a_1b_1$



AA_1, BB_1, CC_1 – mediane

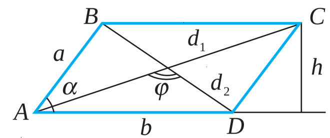
$A_1G = \frac{1}{3}m_a$

$GA = \frac{2}{3}m_a$

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$

Patrulatere

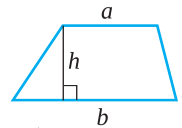
Paralelogramul



$\mathscr{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

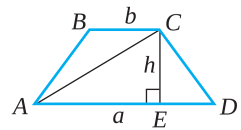
$d_1^2+d_2^2 = 2(a^2+b^2)$

Trapezul

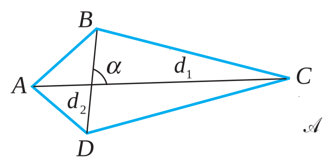


$\mathscr{A} = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Trapezul isoscel

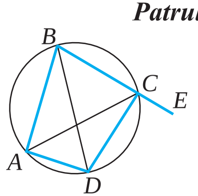


$AE = \frac{a+b}{2}$, $ED = \frac{a-b}{2}$



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$

Patrulatere înscrise



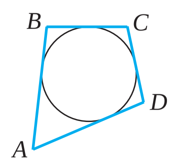
$m(\angle ABC) + m(\angle CDA) = 180° =$

$= m(\angle BAD) + m(\angle BCD)$

$\angle ABD \equiv \angle ACD$

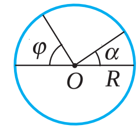
$\angle DCE \equiv \angle DAB$

Patrulatere circumscrise



$BC + AD = CD + AB$

Cercul

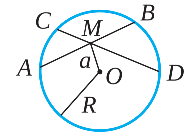


$\mathscr{A}_{\text{cerc}} = \pi R^2$

$\mathscr{A}_{\text{sect}} = \frac{1}{2}R^2\alpha$; $\mathscr{A}_{\text{sect}} = \pi R^2 \frac{\varphi}{360°}$

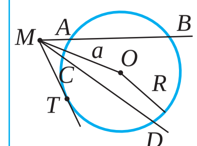
α – măsură în radiani

φ – măsură în grade



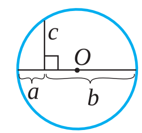
$AM \cdot MB = CM \cdot MD =$

$= R^2 - a^2$

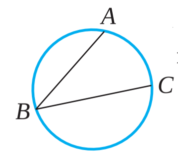


$AM \cdot MB = CM \cdot MD =$

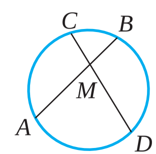
$= a^2 - R^2 = MT^2$



$c^2 = ab$

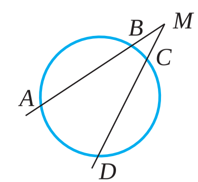


$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\smile AC)$



$m(\angle AMD) =$

$= \frac{m(\smile AD) + m(\smile CB)}{2}$



$m(\angle AMD) =$

$= \frac{m(\smile AD) - m(\smile BC)}{2}$

Răspunsuri şi indicaţii

Modulul 1. Numere reale. Recapitulare şi completări

A. **1.** a) 0,75; b) 0,2(6); c) 0,6; d) 0,125; e) 0,08; f) 0,008; g) 0,1(6); h) 0,(1). **2.** a) $\frac{13}{99}$; b) $\frac{23}{9}$; c) $\frac{11}{9}$; d) $\frac{23}{99}$; e) $\frac{23}{18}$; f) $\frac{271}{990}$. **3.** a) Iraţional; b), c), d) raţional. **4.** a) Da; b) posibil; c) nu. **5.** a) 1,73 şi 1,74; b) 2,64 şi 2,65; c) 0,31 şi 0,32; d) 2,73 şi 2,74; e) 1,64 şi 1,65. **6.** a) $3{,}257129 < 3{,}258129$; b) $-7{,}123465 > -8{,}123466$. **7.** 0,627115. **8.** a) $0{,}428571 < \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{3} < \sqrt{5}$; c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3}$; d) $\sqrt{3}+1 > \sqrt{10}-1$. **9.** a) F; b), c) A. **10.** a) $S=\{-3, 1\}$; b) $S=\varnothing$. **11.** a) $S=(-6, +\infty)$; b) $\left(-\infty, \frac{5}{9}\right)$. **12.** a) 8°C; b) $\frac{109}{11} \approx 10°$ C. **13.** a) $\sqrt{3a}$ cm; b) 58,09 cm^3.

B. **14.** a) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} > \sqrt{6+5\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{19+8\sqrt{3}} > \sqrt{14+6\sqrt{5}}$. **15.** a) 5; b) $2\sqrt[8]{2}$. **16.** $4\sqrt{3}$. **17.** a) Da; b) posibil; c) nu. **18.** $\sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55$ (A). **19.** $9-1{,}8\sqrt{10}$. **20.** a) Iraţional; b), c) raţional; d) iraţional. **22.** b). **23.** 40 de locuri. **25*.** $\sqrt{0{,}393273223223}$. *Indicaţie*. Utilizaţi pătratele acestor numere. **26*.** $ab < 0$.

Probă de evaluare

A. **1.** **C**. **2.** **C**. **3.** 3,162 şi 3,163. **4.** $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}+1}$.

B. **1.** **C**. **2.** **B**. **3.** **B**. **4.** 0,267 şi 0,268. **5.** $\left[1{,}9;\ \sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ – intersecţia; $\left[\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{5}+2}{2}\right]$ – reuniunea. **6.** $\frac{a+b}{b-a}$, $ab \neq 0$, $a \neq b$. **7.** Raţional.

Modulul 2. Elementele de logică matematică şi de teoria mulţimilor

§1. A. **1.** a) Da; b) nu. **2.** a) $\mathbb{N}$; b) A; c) $\varnothing$; d) $\{6, 7, 8, \ldots\}$. **3.** $\mathrm{card}\mathcal{B}(A) = 32$. **4.** a) De exemplu, –3, –2, –1; b) de exemplu, 0, ±1. **5.** a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
6. a) $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$; b) $\{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\}$. Da. **7.** a) $A \neq B$, $A \cup B = (-\infty, 1]$, $A \cap B = \{-3\}$; b) $A \neq B$, $A \cup B = (1, \infty)$, $A \cap B = \varnothing$.

§1. B. **8.** Da. **9.** a) $(-6, -1) \cup (3, 6)$; b) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$. **10.** $\mathrm{card}A = 5$, $\mathrm{card}\mathcal{B}(A) = 32$. **11.** a) Mulţimea numerelor iraţionale; b) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **12.** a) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. **14*.** a) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; b) $\mathbb{R}_-$. **15*.** a) F; b) F.

§2. A. **1.** a) F; b) nu este propoziţie; c) A. **2.** a), b) A, c), d) F. **4.** „Dacă diagonalele patrulaterului *ABCD* sînt perpendiculare, atunci patrulaterul este romb” – F.

§2. B. **5.** a) A; b) F. **6.** a), b), c) F; d) A. **7.** a) „*ABC* este un triunghi” – partea explicativă, „*ABC* este un triunghi dreptunghic” – ipoteza, „pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor” – concluzia; b) „unghiul α este unghi interior al triunghiului *ABC*” – partea explicativă, „triunghiul *ABC* este echilateral” – ipoteza, „mărimea unghiului α este de 60°” – concluzia. **10.** „Dacă $a+b$ este un număr raţional, atunci numerele *a*, *b* sînt raţionale” – F. **11*.** a), b) F.

Exerciții și probleme recapitulative

A. **1.** a), b), c), g) A; d), e), f), h) F. **3.** a) „numărul a se divide cu 14” – condiția suficientă, „numărul a se divide cu 7” – condiția necesară; „Dacă numărul întreg a se divide cu 7, atunci el se divide cu 14” – F; b) „triunghiul examinat este dreptunghic” – condiția suficientă, „triunghiul examinat are două unghiuri ascuțite” – condiția necesară; „Dacă un triunghi are două unghiuri ascuțite, atunci el este dreptunghic” – F. **4.** a) A; b) F. **5.** $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$, $A\setminus B=\{2, 4\}$, $B\setminus A=\{5, 9\}$, $A\times B=\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 9), (2, 1), (2, 3), ..., (4, 5), (4, 9)\}$. **6.** 4 elevi.

B. **7.** $A\cup B=(-3, +\infty)$; $A\cap B=\{5\}$. **8.** a) $S_1\cup S_2=\{-1, 6\}$; b) $S_1\cap S_2=\{6\}$; c) $S_1\setminus S_2=\{-1\}$; d) $S_2\setminus S_1=\varnothing$; e) $S_1\times S_2=\{(-1, 6), (6, 6)\}$. **9.** 32 de submulțimi: $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{-2, -1\}$, ..., $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **10*.** a), c) F; b) A.

Probă de evaluare

A. **1.** F. **2.** b) „p și q” – F, „p sau q” – A, „non p” – A, „non q” – F. **3.** a) „patrulaterul este romb” – condiția suficientă, „în romb se poate înscrie un cerc” – condiția necesară; b) „Dacă într-un patrulater se poate înscrie un cerc, atunci patrulaterul este romb” – F. **4.** a) M_3; b) M_1. **5.** a) A; b) F.

B. **1.** Nu este propoziție. **2.** b) „p și q” – F; „p sau q” – A; „non p” – A; „non q” – F. **3.** a) „patrulaterul este dreptunghi” – condiția suficientă, „patrulaterului i se poate circumscrie un cerc” – condiția necesară; b) „Dacă patrulaterului i se poate circumscrie un cerc, atunci el este dreptunghi” – F. **4.** a) $S_1\cup S_2=\{1, \pm 3\}$; b) $S_1\cap S_2=\{1\}$; c) $S_2\setminus S_1=\{3\}$; d) $S_1\setminus S_2=\{-3\}$.

Modulul 3. Radicali. Puteri. Logaritmi

§1. A. **1.** a) 0,05; b) 288; c) $\frac{90}{161}$; d) $2-\sqrt{3}$, $0{,}26\le 2-\sqrt{3}\le 0{,}27$; e) $\sqrt{3}-2$, $-0{,}27\le\sqrt{3}-2\le -0{,}26$. **2.** a) $2|a|\cdot\sqrt[4]{2b^3}$; b) $-5ab\sqrt{b}$; c) $|x+3|$; d) xy^2; e) $-13yx\sqrt{x}$; f) $-ab\cdot\sqrt[4]{8ab^2}$. **3.** a) $\sqrt{3b^2}$; b) $-\sqrt{-2x}$; c) $\sqrt{7c^2a}$, dacă $c\le 0$; $-\sqrt{7c^2a}$, dacă $c>0$; d) $\sqrt[3]{2x^3y}$; e) $\sqrt[4]{2a^5}$; f) $\sqrt{3a^2}$; g) $\sqrt{3y^2}$, dacă $y>0$, și $-\sqrt{3y^2}$, dacă $y<0$; h) $\sqrt{2x}$; i) $\sqrt[3]{2x^4y}$; j) $-\sqrt[4]{-x^5}$. **4.** a) 34; b) $8\sqrt{3}$; c) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; d) $\sqrt{6x}$; e) $8(9+4\sqrt{5})$. **5.** a) $\frac{\sqrt[3]{x}}{xy}$; b) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{13}$; c) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$; d) $-\sqrt{13}-\sqrt{18}$; e) $-\frac{1}{4}(4+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-\sqrt{14})$.

§1. B. **6.** a) –1; b) $\frac{13}{12}$; c) 3; d) 5; e) $\sqrt{6}-\sqrt{5}+1$, $1{,}213\le\sqrt{6}-\sqrt{5}+1\le 1{,}214$. **7.** a) $\frac{9}{2}\sqrt{13}$; b) $\frac{25}{108}$; c) $4p-\sqrt{4p^2-1}$; d) $\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ dacă } x>2\\ -\sqrt{x}, \text{ dacă } 0<x<2;\end{cases}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; f) $2\sqrt{\frac{a}{x}}$, dacă $\sqrt{a}\ge x>0$; $2\sqrt{x}$, dacă $\sqrt{a}<x$; g) $\sqrt[4]{3}+\sqrt{5}-1$. *Indicație.* $2\sqrt{5}-6=-(\sqrt{5}-1)^2$; h) $1+2\sqrt{3}$. **9.** 5 fețe. **10*.** 7.

§2. A. **1.** a) $\frac{7}{3}$; b) 10^5; c) $\frac{125}{2}$; d) 0; e) $\left(\frac{5}{2}\right)^4$; f) 9. **2.** a) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; b) $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$; c) $\sqrt[4]{a}-2$; d) $\frac{b+a}{b-a}$; e) $16a^2$; f) $3^{-6-4\sqrt{3}}$; g) $3^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **3.** a) Mai mic decît 1; b), c) mai mare decît 1. **4.** 12%. **5.** $\frac{10^{20}}{16\sqrt{2}}$ cubulețe. **6.** $15^{\frac{2}{7}}$ cm.

§2. B. **7.** a) 5; b) $\frac{3}{2}$; c) 7200; d) $\frac{1}{4}\cdot 5^{15}$. **8.** a) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; c) $\frac{x+3y}{x-y}$; d) –1; e) $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, dacă $\begin{cases} m>1 \\ m\neq\sqrt[3]{2}; \end{cases}$ $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, dacă $m\leq 1$, $m\neq 0$; f) 7^{-5}; g) $3^{\sqrt{3}}\cdot 5^{20\sqrt{3}}$. **9.** a), b) Mai mare decît 1; c), d) mai mic decît 1.

§3. A. **1.** a) 9; b) 2; c) 1; d) 2; e) 144. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $3a+ab$. **4.** 16. **6.** $1<\log_2 3<\log_2 5$.

§3. B. **8.** a) $\log_2|a|$; b) $4\log_a|b|$; c) $\log_a b$; d) 3; e) $3-2\log_a b$, dacă $3-\log_a b\geq 0$, şi –3, dacă $3-\log_a b<0$; f) $a+1$; g) $\log_n^2 p$; h*) 0. **9.** $x=\sqrt[4]{5}$. **11.** a) $3(1-a-b)$; b) $\frac{1+ab}{a(8-5b)}$. *Indicaţie.* Descompuneţi numerele în factori primi. **13*.** 5. **14*.** 0.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. **1.** a) 4; b) 2; c) –2,35; d) 7200. **2.** a), e), f) A; b), c), d), g) F. **3.** a) –2; b) $2^{\frac{5}{4}}$. **4.** a) $-2x$; b) 1. **5.** a) $\sqrt[6]{35}>\sqrt[7]{35}$; b) $\sqrt{5^{16}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$. **6.** a) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; b) $\frac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$; c) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$; d) $-\frac{1}{6}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$. **7.** 2 m.

B. **10.** a) F; b) A. **11.** a) $\frac{7}{4}$; b) 6; c) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$; d) $\log_6(a^3-2)^2$. **12.** a) Primul mai mic; b) primul mai mare; c) egale; d) primul mai mare. **13.** $a\in\mathbb{R}_-^*$. **14*.** $\frac{3(1-a)}{a}$. **15*.** $n=3$.

Probă de evaluare

A. **1.** **B.** **2.** $3\sqrt{7}<7\sqrt{3}$. **3.** 8. **4.** $x-1$. **5.** a) F; b) A. **6.** $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}>\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}>\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$. **7.** $7\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$. **8.** **B.** **9.** 36. **10.** $a, b\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $ab(a-b)^2$.

B. **1.** A. **2.** $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}>(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. **3.** 1. **4.** $-\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}$. **5.** a), b) F. **6.** $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}<\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,2}$. **7.** $(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{13}+\sqrt{9})$. **8.** **B.** **9.** -10^{-1}. **10.** $a\in\mathbb{R}_+^*$, a^2+a+1.

Modulul 4. Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

§1. A. **3.** a) $S=\{4\}$; b) $S=\{25\}$; c) $S=\{6\}$. **4.** a) $S=\{3, 4, 5, 6\}$; b) $S=\{2, 3, 4\}$; c) $S=\{4, 5, 6, 7\}$. **5.** a) Expresia A_3^6 nu are sens. **6.** a) 5; b) 25 200; c) $\frac{7}{144}$; d) 336; e) 576; f) 12; g) nu are sens. **7.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\{6, 11\}$. **9.** 4368 de moduri. **10.** 306 partide. **11.** 20 de moduri. **12.** 40320 de moduri. **13.** 210 moduri. **14.** a) 720 de „termeni”. **15.** 5040 de moduri. **16.** 56 de moduri. **17.** 8008 moduri. **18.** a) $\approx 0{,}16$; b) $\approx 0{,}31$.

§1. B. **21.** a) $S=\{5\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{2\}$. **22.** a) $n\in[6, +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$; b) $n\in[0, 9]$, $n\in\mathbb{N}$; c) $n\in[1, 4]$, $n\in\mathbb{N}$. **24.** a) $x=6$, $y\in[0, 10]$, $y\in\mathbb{N}$; b) $x=12$, $y\in[0, 12]$, $y\in\mathbb{N}$. **27.** a) $6!-5!=600$; b) $5!=120$; c) $5!=120$; d) $5!-4!=96$; e) $4!=24$. **28.** $C_8^6\cdot A_9^6=1\,693\,440$. **29.** $C_2^1\cdot C_{23}^{10}=2\,288\,132$ (moduri). **30.** $C_7^3\cdot C_9^3=2940$ (moduri). **31.** *Indicaţie.* Aplicaţi algoritmul folosit la rezolvarea pr. 7 din secvenţa 1.5.2. **32.** $C_{10}^3\cdot C_6^2$ moduri. **33.** $(C_3^1\cdot C_{10}^4+C_3^2\cdot C_{10}^3)$ moduri. **34.** a) $S=\{x\mid x\in(4, +\infty),\ x\in\mathbb{N}\}$; b) $S=\{3, 4, 5\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{x\mid x\in[4, 13],\ x\in\mathbb{N}\}$; e) $S=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; f) $S=\{7, 8, 9, \ldots\}$. **38.** a) *Indicaţie.* Reduceţi ecuaţia a doua la forma $(x+2)!=6!$. b) $S=\{(4, 8)\}$.

§2. B. **1.** b) $6561a^8+17\,496a^7b+20412a^6b^2+13608a^5b^3+5670a^4b^4+1\,512a^3b^5+$ $+252a^2b^6+24ab^7+b^8$; c) $a^3+6a^2\sqrt{ab}+15a^2b+20ab\sqrt{ab}+15ab^2+6b^2\sqrt{ab}+b^3$.

2. b) $a\cdot\sqrt[3]{a^2}-5ab\cdot\sqrt[3]{a}+10ab^2-10b^3\cdot\sqrt[3]{a^2}+5b^4\cdot\sqrt[3]{a}-b^5$; c) $\frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{7}{x^3\cdot\sqrt{y}}+\frac{21}{x^2y\cdot\sqrt{x}}-$ $-\frac{35}{x^2y\cdot\sqrt{y}}+\frac{35}{xy^2\cdot\sqrt{x}}-\frac{21}{xy^2\cdot\sqrt{y}}+\frac{7}{y^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{1}{y^3\cdot\sqrt{y}}$. **4.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice şi binomul lui Newton. **5.** a) $T_5=39191040x^6$; b) $T_7=5376xy^3\cdot\sqrt{x}$; c) $T_{10}=-4330260a^2b^9$. **6.** a) 2^{25}; b) 2^{108}; c) 2^{215}; d) 2^{71}. **7.** a) 2^{14}; b) 2^{24}; c) 2^{27}; d) 2^{31}. **8.** a) $T_5=29120x^{10}$; b) $T_9=329472x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot a^4$; c) $T_7=593775$. **9.** a) $T_9=3294720x^{16}y^{32}$; c) $T_8=-3432x^{21}y^{14}$. **10.** a) $T_{13}=5200300x^{13}y^{36}$, $T_{14}=-5200300x^{12}y^{39}$; b) $T_7=1716a^3b^3\cdot\sqrt{a}$, $T_8=1716a^3b^3\cdot\sqrt{b}$. **11.** a) *Indicație*. În formula lui Newton inlocuiți x^2 şi y^2 cu 1; b) *Indicație*. În formula lui Newton înlocuiți x şi y^3 cu 1. **12.** a) $T_{15}=3876000$. **13.** $T_6=56x^{-\frac{1}{4}}$. **14.** $n=8$. **15.** $T_7=924x^9$. **16.** 3360.

Exerciții şi probleme recapitulative

A. 1. 552 de fotografii. **2.** 91 de partide. **3.** 27 907 200 de moduri. **4.** 479 001 600 de moduri. **5.** a) 1 680 de moduri; b) $4\cdot A_7^3=840$ (moduri). **6.** 20 160 de moduri. **7.** 40 320 de moduri. **8.** a) $C_{12}^5\cdot C_3^1=2376$ (moduri); b) 2 376 de moduri; c) 792 de moduri; d) 5 544 de moduri. **9.** $\approx 0{,}01$ sau $\approx 1\%$. **10.** 0,2. **11.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\{7\}$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\{2\}$. **12.** a) $n=8$; b) $n=9$; c) $n=12$; d) $n=7$. **13.** $T_7=54\,264$. **14.** $x=27$. **15.** $P(A)=\frac{2}{15}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(C)=\frac{7}{15}$.

B. 16. 7 elemente. **17.** a) 5 040 de moduri; b) $(n-1)!$. **18.** *Indicație*. $C_{10}^4\cdot C_5^2+C_{10}^3\cdot C_5^3+C_{10}^2\cdot C_5^4+C_{10}^1\cdot C_5^5$. **19.** 261 de numere. **20.** a) $S=\{6, 7, 8, ...\}$; b) $S=\{0, 1, 2, 3, ..., 16\}$; c) $S=\{8, 9, 10\}$. **21.** a) Un singur termen rațional; b) 17 termeni raționali. **23.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice. **25*.** $S=\{(2; 1)\}$. **26*.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice.

Probă de evaluare

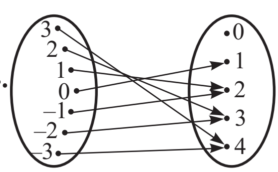
A. 2. a) A; b) 32. **3.** $S=\{2\}$. **4.** 12 650 de moduri.

B. 2. F. **3.** $S=\{4, 5, 6, 7, ..., 49\}$. **4.** $9\cdot 9!$ numere. **6.** 3 118 752 de moduri.

Modulul 5. Funcții reale. Proprietăți fundamentale

§1. A. 1. a) $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.
2. a) $[-2, +\infty)$; b) $(-\infty; 0{,}25]$; c) $\mathbb{R}^*$.
3. a), b) Nu; c) da.

4.



§1. B. 5. a) $(-\infty, -1]\cup(1, +\infty)$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; d) $\mathbb{R}\setminus[0, 1)$. **6.** a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{R}^*$; c) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.
7. a) $(f+g)(x)=|x|+x-1$, $(f\cdot g)(x)=|x|(x-1)$, $(f\circ g)(x)=|x-1|$;
b) $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x+1}+x^3+1$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x+1}(x^3+1)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$;
c) $(f+g)(x)=x^3-1+\sqrt[3]{x-1}$, $(f\cdot g)(x)=(x^3-1)\cdot\sqrt[3]{x-1}$, $(f\circ g)(x)=x-2$.
8. a) $(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n})(x)=x^{2^n}$; b) $(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{n})(x)=x-n$.
9. a) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=x^{17}$, $g(x)=x^{10}+1$; b) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $g(x)=x^2-1$.
10*. Da. De exemplu, $A=B=C=\mathbb{R}$, $M=\{0\}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$.

§2. A. 1. a) $(-\infty, +\infty)\nearrow$; b) $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)\nearrow$; c) $(-\infty, 0)\searrow$, $(0, +\infty)\nearrow$.
2. a) $y_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; b) $y_{\max}=f(0)=0$. **3.** 1 a) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; 1 b) $\varnothing$; 1 c) $\{0\}$; 2 a) $\{-1, 0\}$; 2 b) $\{0\}$.
4. a) $[-2, 0)\cup(0, +\infty)$; b) $(1, 2]$; c) $\{2\}$. **5.** $f(x)=|x|$.

§2. B. **6.** a) $(-\infty,\ 0)\nearrow$; $(0,\ +\infty)\searrow$; b) creşte pe fiecare interval $[n,\ n+1),\ n\in\mathbb{Z}$.
7. $f+g,\ f+f,\ f^3,\ g\circ f$ – crescătoare, $-f$ – descrescătoare. **9.** a) $y_{max}=f(0)=1$; b) $y_{min}=f(0)=f(1)=0,\ y_{max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. **10.** f_2, perioada 1; f_3, perioada 2; f_4, perioada $\frac{1}{5}$.
11. a) Impară; b) pară; c) nici pară, nici impară. **13*.** a) $f=h_1+h_2,\ h_1(x)=2x^2+3,\ h_2(x)=-x$; b) $f(x)=h_1+h_2,\ h_1(x)=-2,\ h_2(x)=x$. **14.** a) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=x^3+1$; b) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=x^4$; c) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$; d*) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\},\ f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$.
15*. a) f nu este bijectivă; b) f_1 – bijectivă.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. **1.** a) $D(f)=\mathbb{R},\ E(f)=\mathbb{R}$; b) $D(f)=\mathbb{R}^*,\ E(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; c) $D(f)=\mathbb{R},\ E(f)=\left[-\frac{9}{4},\ +\infty\right)$.
2. a) Crescătoare pe $\mathbb{R}$; d) descrescătoare pe $(-\infty,\ 0),\ (0,\ +\infty)$; c) descrescătoare pe $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$, crescătoare pe $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. **3.** b). **4.** a) Pe $\left(-3,\ -\frac{7}{4}\right)$ – valori negative, pe $(-\infty,\ -3)\cup\left(-\frac{7}{4},\ +\infty\right)$ – valori pozitive; b) pe $(2,\ 4)$ – valori negative, pe $(-\infty,\ 2)\cup(4,\ +\infty)$ – valori pozitive; c) pe $\left(-\frac{26}{5},\ -4\right)$ – valori negative, pe $\left(-\infty,\ -\frac{26}{5}\right)\cup(4,\ +\infty)$ – valori pozitive. **5.** a) $y_{max}=f(1)=1$; b) $y_{min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$; c) $y_{min}=f(-3)=-9$.

B. **6.** $(f+g)(x)=5,\ (f-g)(x)=2x-1,\ (f\cdot g)(x)=-x^2+x+6,\ (f\circ g)(x)=5-x,\ (g\circ f)(x)=1-x$.
7. a), c) Impară; b) nici pară, nici impară. **8.** a) $\Phi=f\circ g,\ f(x)=x^{\frac{3}{2}},\ g(x)=x^7+2$;
b) $\Phi=f\circ g,\ f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^4+3x^2+1$.

Probă de evaluare

A. **1.** **C**. **2.** $(1,\ +\infty)$. **3.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $y_{max}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. **4.** $\{3,\ 4\}$. **5.** **A**. **6.** Pe $(4,\ 5)$ – valori pozitive, pe $(-\infty,\ 4),\ (5,\ +\infty)$ – valori negative.
B. **1.** **C**. **2.** $h=f_2\circ f_1$. **3.** $(0,\ +\infty)$. **4.** a) 0; b) $y_{max}=f(0)=1$. **5.** **D**. **6.** **B**. **7.** Pe $(-1,\ 0)$ – valori negative, pe $(-\infty,\ -1),\ (0,\ +\infty)$ – valori pozitive.

Modulul 6. Ecuaţii. Inecuaţii. Sisteme. Totalităţi

§1. A. **2.** b) $P(X)$ nu are rădăcini reale; c) $\alpha_1=1$ – rădăcină multiplă de ordin 4, $\alpha_2=1$ – rădăcină simplă. **3.** a) 1; b) –0,5; c) –3. **4.** a) $f(t)=3600t+2400$; b) 15 ore. **5.** d) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; e) $S=\mathbb{R}$; f) $S=\{1\}$; g) $S=\left\{0,\ 2\frac{2}{3}\right\}$; h) $S=\varnothing$; i) $S=\{-2,\ 2\}$. **6.** 210 cm^2. **7.** 52 m, 40 m. **8.** $33\frac{2}{3}$ km/h.

§1. B. **10.** 160 g, 20%. **11.** $(2\sqrt{10}-5)$ km/h. **13*.** a), b) *Indicaţie*. $x_1=1$ este soluţie a ecuaţiei.
14*. $S=\{1,\ 6,\ 3-\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2}\}$. **15*.** $S=\left\{\frac{m}{5}\right\},\ m\in\mathbb{R}_-^*$.

§2. A. **1.** a), b) Da. **2.** a) $S=\{(1,\ -2)\}$; b) $S=\{(-1,\ -3),\ (-3,\ -1)\}$; c) $S=\{(-4,\ -5),\ (5,\ 4)\}$; d) $S=\{(2,\ 0),\ (0,\ -2)\}$. **3.** a) $S=\left\{\left(\frac{7}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)\right\}$; c) $S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}-1\right)\right\}$. **4.** $S=\{-2,\ 1,\ 2,\ 5\}$.

5. 24 km/h, 18 km/h. **6.** Un manual – 30 lei, un caiet – 20 lei. **7.** 20 de mese, 45 de persoane. **9.** 6 zile, 12 zile. **10.** $S=\left\{0,\ 3,\ \frac{3-\sqrt{33}}{6},\ \frac{3+\sqrt{33}}{6}\right\}$.

§2. B. **11.** a) *Indicaţie*. Înmulţiţi prima ecuaţie cu 13, apoi adunaţi ecuaţia obţinută cu a doua; b) $S=\varnothing$. **12.** a) *Indicaţie*. Substituiţi: $x+y=t,\ xy=z$; c) $S=\{(2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}),\ (2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}),\ (-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}),\ (-2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2})\}$. **13.** a) *Indicaţie*. Înmulţiţi ecuaţiile membru cu membru; b) $S=\{(-3,\ -2),\ (3,\ 2)\}$; c) $S=\left\{\left(2,\ \frac{1}{2}\right),\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\ \frac{2\sqrt{10}}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{10}}{5},\ -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$; d) *Indicaţie*. Aplicaţi definiţia modulului; e) $S=\varnothing$; f) *Indicaţie*. Aplicaţi definiţia modulului. **16.** $m_{CH_3OH}=0{,}64$ g, $m_{C_2H_5OH}=0{,}46$ g, $W_{CH_3OH}\approx 0{,}5818$, $W_{C_2H_5OH}\approx 0{,}4182$.

17*. a) $S=\left\{\left(\frac{a^2+a+1}{a^2+1},\ \frac{a+1}{a^2+1}\right)\right\},\ a\in\mathbb{R}$; c) *Indicaţie*. Înmulţiţi cele trei ecuaţii membru cu membru.

§3. A. **1.** a) $S=(14{,}5;\ +\infty)$; b) $S=(-\infty;\ 0)$; c) $S=(-\infty;\ -2{,}4]$; d) $S=[0;\ +\infty)$. **2.** a) $S=(0,\ 1]$; b) $S=(-\infty,\ 0]\cup\left(\frac{1}{3},\ 2\right]$; c) $S=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$; d) $S=(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$; e) $S=[-1,\ 0)\cup[1,\ +\infty)$.

§3. B. **3.** (12 m, 40 m). **5.** a) $S=(-\infty,\ -2]\cup(-1,\ 0]$; b) $S=(-1,\ +\infty)$; c) $S=(-8,\ -1]\cup\left(1,\ \frac{3}{2}\right]$.

§4. A. **1.** a) Nu; b) da. **2.** a) $S=[0,\ 3]$; b) $S=[-1,\ 0)\cup(3,\ 4]$; c) $S=(-\infty,\ 0)\cup[3,\ +\infty)$. **3.** a) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup(2{,}3)$; b) $S=(-6,\ 5)$; c) $S=\left(0,\ \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$. **4.** a) $S=(-\infty,\ 3)$; b) $S=(0,\ +\infty)$; c) $S=(-\infty,\ -2)\cup[-1,\ 0]\cup(5,\ +\infty)$. **5.** $x\in\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$. *Indicaţie*. Aplicaţi inegalităţile triunghiului.

§4. B. **6.** a) $S=\{3\}$. **7.** a) $S=[-8,\ -6{,}5)\cup[0,\ 5)$; b) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ +\infty\right)$. **8.** $\left(4,\ \frac{8+\sqrt{61}}{3}\right)$ km/h. **10*.** b) $S=(-\infty,\ -3]\cup(4,\ 5)\cup(5,\ +\infty)$. **11*.** $S=(-1,\ 1)\cup\{-3\}\cup\{2\}$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. **1.** b) $S=\left\{4\frac{9}{19}\right\}$; c) $S=\left\{1\frac{1}{14}\right\}$. **2.** a) 17, 27; b) 5, 50; c) 200 t, 320 t. **3.** 12 motociclete, 36 de maşini. **5.** 18 ani. **6.** 90 000 lei, 135 000 lei, 225 000 lei. **7.** $x=-1,\ y=-1$. **8.** a) $-1,\ -\frac{2}{3}$ – rădăcini simple; 1 – rădăcină dublă; b) 1 – rădăcină simplă. **9.** $a_1=-2,\ b_1=2;\ a_2=-\frac{2}{3},\ b_2=6$. **10.** a) F; b) A.

B. **11.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{1,\ 8\}$. **12.** a) $S=\{(1{,}5;\ -2),\ (10,\ 15)\}$; b) $S=\{(70,\ -28),\ (4,\ 5)\}$; c) $S=\{(6,\ 8),\ (8,\ 6)\}$. **13.** a) $S=\{(3-3\sqrt{2},\ 3+3\sqrt{2}),\ (3+3\sqrt{2},\ 3-3\sqrt{2}),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}$; b) $S=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$. **14.** a) $m\in\{-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\}$; b) $m\in(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$; c) $\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}]$.

Probă de evaluare

A. **2.** a) $-1,\ \frac{2}{3}$ – rădăcini simple. **3.** a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$; b) $x\in(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0]\cup(1,\ +\infty)$. **4.** O lalea – 8 lei, o narcisă – 5 lei.

B. **1.** $S=\{(-1,\ -2),\ (2,\ 1),\ (1-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}),\ (1+\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2})\}$. **2.** a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,\ 5\}$. **3.** 40 km/h, 50 km/h.

Modulul 7. Funcţii elementare. Ecuaţii. Inecuaţii

§1. A. **1.** b) $S=\left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{53}{136}\right\}$. **2.** a) $S=\{(2,1)\}$; b) $S=\{(0,1)\}$. **3.** a) $S=\left(-\infty,-\frac{21}{2}\right)$; b) $S=(-\infty,-10)$. **4.** a) $f(18)=0$; $g\left(\frac{12}{5}\right)=0$; c) $\left(\frac{18}{13},\frac{33}{13}\right)$; d) $S=\left(-\infty,\frac{9}{7}\right)$; e) $S=\varnothing$. **5.** a) $S=\left\{-2{,}4;\frac{1}{3}\right\}$; b) $S=\left\{-\frac{25}{8},\frac{6}{31}\right\}$. **6.** a) 10 muncitori; b) 3 hl; 2,1 hl. **8.** a) $S=\{5\}$; b) $S=\varnothing$.

§1. B. **10.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=1$, $S=\left\{\frac{2}{a-1}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; b) $S=\mathbb{R}$ pentru $a=1$, $S=\varnothing$ pentru $a=-1$, $S=\left\{\frac{a+1{,}5}{a+1}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; c) $S=\mathbb{R}$ pentru $a=0$, $S=\{1\}$ pentru $a\in\mathbb{R}^*$. **11.** b) $x\in(-1,+\infty)$. **12.** $a\in(-3,0]$. **14.** a) $S=\{7,8,9,\dots\}$; b) $S=\{9,10,11,\dots,15\}$. **15.** 1,5 kg. **16.** 40 t cu 5% nichel, 100 t cu 40% nichel. **17.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=7{,}5$, $S=\left\{\frac{2-3a}{2a-15}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{7{,}5;\pm\sqrt{5}\}$. **18*.** a) $a=1$; b) $a=-1$; c) nu există astfel de valori ale lui a.

§2. A. **1.** a) $S=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{33}-1}{4},+\infty\right)$; d) $S=(-2,-1)$. **2.** a) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$, $\left(\frac{1}{3},1\right)$; b) $\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; c) $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$, $(-3,0)$. **3.** a) $[-3,1]$; b) $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}},+\infty\right)$; c) $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{3},+\infty)$. **4.** 510 m. **5.** $a=b=5$. **6.** $(x-4)^2+(y-5)^2=\frac{36}{5}$. **7.** a) $S=\{6,10\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{0{,}5\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2},2,3\right\}$. **8.** a) $S=[-1,5]$; b) $S=\mathbb{R}$; c) $S=\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{3},+\infty\right)$; d) $S=[-4,4]$; e) $S=(-\infty,-4]\cup[5,+\infty)$.
9. a) $y_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$, $y_{\max}=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$; b) $y_{\min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{8}$, $y_{\max}=f(0)=1$.
10. a) $h(5)=237{,}3$ m; b) $\approx 14{,}7$ s. **11.** a) $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$; b) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; c) $[-3,-1]\cup[0,3]$; d) $(-\infty,-4)\cup(-4,-1]\cup[4,+\infty)$.

§2. B. **13.** a) $(x-3{,}5)^2+(y-\sqrt{10})^2=12{,}25$; $(x-3{,}5)^2+(y+\sqrt{10})^2=12{,}25$; b) nu se intersectează; c) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. **14.** c) *Indicaţie*. Fie $|3x-1|=t$, $t\geq 0$. **15.** a), b) *Indicaţie*. Aplicaţi metoda intervalelor; c) $S=(-\infty,1)$; d) *Indicaţie*. Aplicaţi metoda intervalelor; e) $S=\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; f) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$. **16.** *Indicaţie*. Poate fi aplicată metoda grafică. **18.** *Indicaţie*. Puneţi condiţiile $a-1>0$ şi $\Delta=5a^2+2a-3>0$. **20.** $a\in[-1;-0{,}2]$. **21*.** $f^{-1}\colon(-\infty,-2]\to(-\infty,-1]$, $f^{-1}(x)=-1-\sqrt{-2-x}$. **23*.** $a\in(-6,6)$. **24*.** $a\in(-\infty;0{,}5]$.

§3, 3.2. A. **1.** a) $[3,+\infty)$; b) $\mathbb{R}$. **3.** a) Pară; b) impară.

§3, 3.2. B. **4.** a) $(f+g)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^4+x^5$; $(f\cdot g)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^9$; b) $(f+g)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; $(f\cdot g)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$.

5. a) $D(f)=[0, 2]$, $E(f)=[0, 1]$; b) $D(f)=(-\infty, 1]$, $E(f)=[0, +\infty)$; c) $D(f)=\mathbb{R}_+$, $E(f)=\left[0, \frac{1}{4}\right]$. **6.** a) $[0, +\infty)\nearrow$, $(-\infty, 0]\searrow$; b) $(-\infty, -2]\searrow$, $[-2, +\infty)\nearrow$; c) $(0, +\infty)\nearrow$; d) $(-4, +\infty)\nearrow$.

7. a) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_-$, $f^{-1}(x)=-\sqrt[4]{x}$; b) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2$; c) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=4x^3$.

8*. a) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+x^3$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot x^3$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=x$; b) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=(\sqrt[3]{x})^2$.

§3, 3.3. A. **1.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\{10\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{0\}$; e) $S=\{2\}$; f) $S=\{3\}$. **2.** a) $S=\{2, 5\}$; b) $S=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$; d) $S=\{-1; 1{,}5; 2; 3\}$. **4.** F.

§3, 3.3. B. **5.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})\right\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{2\}$; e) 36 a, 4 a.

6. a) $S=\{2\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}(5\sqrt{13}-13)\right\}$; c) $S=\{-3\}$; d) $S=\{1, 2, 10\}$. **7.** a) $S=\{1, 3, 4\}$; b) $S=\{-8, 8\}$. **8.** a) $S=\{-4, 2\}$; b) $S=\{4, 9\}$; c) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$; d) $S=\{7+\sqrt{1{,}75}\}$.

9. b) $S=\{-4, 4\}$. **10.** a) $S=\{1\}$. **11*.** a) $S=\left\{-\frac{47}{24}\right\}$; b) $S=\{12\}$; d) $S=[5, 10]$; e) $S=\{0\}$; f) $S=\{-7, 2\}$. **12*.** a) $S=\left\{\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}, \frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}\right\}$; b) $S=\left\{-1, \frac{9}{16}\right\}$. **15*.** a) $S=\left\{0, \frac{63a}{65}\,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$; b) $S=\{0\}$ pentru $a=0$, $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty, 0)\cup(0, 1)$, $S=\left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$ pentru $a\in[1, +\infty)$.

§3, 3.4. B. **1.** a) $a\in(-1, +\infty)$; b) $S=[-3, 1]$; c) $S=\varnothing$; d) $S=(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$; e) $S=\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right]$; f) $S=(-10, +\infty)$. **2.** a) $S=\left(-5, \frac{5}{9}\right)$; b) $S=[4;\ 4{,}5)$; d) $S=[4, +\infty)$; e) $S=(-\infty, 0]$; f) $S=\mathbb{R}$. **3.** a) $S=(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$; b) $S=[8, +\infty)$; c) $S=[0, 1]\cup[3, +\infty)$. **4.** a) $S=\left[\frac{73}{16}, +\infty\right)$; c) $S=\left(-\infty, -\frac{19}{8}\right]\cup[4, +\infty)$. **6.** a) *Indicație*. Rezolvați inecuația $|1-x|-|2x-1|\le 2$; b) *Indicație*. Rezolvați inecuația $2+x-3|x-3|>x^2$; c) *Indicație*. Rezolvați inecuația $|t-1|+|3t+1|\le 2t$; d) *Indicație*. Aplicați metoda intervalelor. **7.** a) $S=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$; b) *Indicație*. Efectuați substituția $t=\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}}$; c) *Indicație*. Fie $t=\sqrt{x^2-3x+5}$, $t\ge 0$.

8*. b) *Indicație*. $S=\varnothing$ pentru $a<0$. DVA: $x\in[0, a^2]$. Ridicînd inecuația la pătrat, obținem $\sqrt{a^2-x}<1-a$. Analizați cazurile $1-a>0$ şi $1-a\le 0$, luînd în considerație DVA; c) *Indicație*. Aplicați metoda grafică. Graficul funcției $y=\sqrt{1-x^2}$ este un semicerc, iar graficul funcției $f(x)=2x+a$ este o dreaptă. Analizați cazurile: 1) dreapta este tangentă la semicerc; 2) dreapta intersectează semicercul în două puncte, într-un punct; 3) graficele nu se intersectează.

§3, 3.5. B. **1.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{(1, 1)\}$; c) $S=\{(2, -1)\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)\right\}$; e) $S=\{(1, 27), (27, 1)\}$. **2.** a) $S=\{(2, 8), (8, 2)\}$; b) $S=\{(8, -1), (1, -8)\}$. **3.** a) $S=\{-1, 3, 4\}$; b) $S=\{-1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}, 3\}$.

4. b) $S=\{-7, 0, 2\}$. **8*.** a) $S=\varnothing$ pentru $a<0$, $S=\{(9a^2, a^2)\}$ pentru $a>0$, $S=\{(0, 0)\}$ pentru $a=0$; b) *Indicație*. DVA: $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}_+$. Ecuația a doua se va scrie $(x+1)^2-(y+2)^2=0$. Atunci $x=-1\pm(y+2)$. În cazul $x=y+1$, prima ecuație devine $y-\sqrt{y}+1-a=0$, care se rezolvă ca ecuație de gradul II în raport cu $\sqrt{y}$; c) *Indicație*. DVA: $xy\ge 0$. Prima ecuație devine $(x+y)^2-xy=a^2$. Din ecuația a doua, $x+y=a-\sqrt{xy}$ şi substituiți în ecuația de mai sus.

§3, 3.6. B. **1.** a) $S=(7, +\infty)$; b) $S=[1, +\infty)$; c) $S=[3, +\infty)$; d) $S=\varnothing$. **2.** a) $S=[4, +\infty)$; b) $S=\varnothing$. **3.** a) $S=\mathbb{R}$; c) $S=(0, +\infty)$.

Proba de evaluare I

A. **1.** a) $-1{,}5$; 1; b) $S=(-\infty; -1{,}5]\cup[1; +\infty)$; c) $(0, 3)$, $(-1{,}5; 0)$. **2.** $S=\{1\}$. **3.** 20 de ore, 30 de ore.

B. **1.** a) $S=[0{,}5; 2{,}5)$; b) $x_1=1$, $x_2=2$. **2.** a) $a\in(-\infty, 1]\cup[9, +\infty)$; b) a^2-8a+9; c) -7; d) $a\in(9, +\infty)$.

§4, 4.2. A. **2.** a) $a>1$; b), c) $a\in(0, 1)$. **3.** a) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^{1,3}$; b) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}<(0{,}3)^{-1,8}$. **4.** a) $x\in(-\infty, 0)$; b) $x\in(0, +\infty)$; c) $x\in(0, +\infty)$. **5.** a) $S=\left\{\dfrac{6}{\lg 11-1}\right\}$; b) $S=\{3\}$; c) $S=\{-3\}$; d) $S=\{-2\}$; e) $S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$; f) $S=\varnothing$; g) $S=\{1\}$; h) $S=\varnothing$. **6.** a) $S=\{-8\}$; b) $S=\{\log_{12}1{,}25\}$; c) $S=\{4\}$. **7.** a) $S=\{-0{,}5; 0{,}5\}$; b) $S=\{-2, 1\}$; c) $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{43}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{43}}{3}\right\}$. **8.** a) $S=\{\log_2 28\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-2\}$. **9.** a) $S=\{\log_3 16\}$; b) $S=\{0, \log_4 3\}$; c) $S=\varnothing$.

§4, 4.2. B. **11.** $(\sqrt{3})^{0,1}$. **12.** a), b) Primul număr mai mic. **13.** $x=\dfrac{8}{5}$. **14.** a) $x\in(-\infty, 0)$; b) $x\in(0, +\infty)$. **15.** a) $S=\{-2, 2\}$; b) $S=\{-2{,}5; 3\}$. **16.** a) $S=\{0\}$. **17.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{1\}$. **18.** a) *Indicație*. Fie $(2+\sqrt{3})^{2x+1}=t$, atunci $(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\dfrac{1}{t}$; b) *Indicație*. Fie $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=t$. Atunci $(5-2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{1}{t}$. **19.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\{-0{,}5; 0{,}5\}$; c) *Indicație*. DVA: $x\in\mathbb{N}$, $x\ge 2$. Ecuația se va împărți la $4^{\frac{1}{x}}$. **20.** a) *Indicație*. Aplicați metoda intervalelor; c) $S=\{0, 2\}$. *Indicație*. Ecuația se va scrie $|x-1|^{x^2-2x}=|x-1|^0$. **21.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\varnothing$. *Indicație*. Utilizați proprietățile funcțiilor ce reprezintă membrii ecuației respective. **22.** a) *Indicație*. Ecuația se va scrie $|x-3|^{x^2-3x}=|x-3|^4$; b) $S=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. **24.** a) *Indicație*. Fie $t=25^{|x+1|}, t>0$. Ecuația devine $t^2-2t+a=0$; b) $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty, 3]\cup[27, +\infty)$, $S=\left\{\log_4\dfrac{16(a-27)}{3-a}\right\}$ pentru $a\in(3, 27)$; c) *Indicație*. Fie $2^x=t$, $t>0$. Ecuația devine $at^2-5t+1=0$.

§4, 4.3. B. **1.** a) $S=(5, +\infty)$; b) $S=(-1, +\infty)$; c) $S=(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$; d) $S=\mathbb{R}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=[4, +\infty)$. **2.** a) $S=(-\infty, 1]$; b) $S=(-\infty, -\log_5 10)$; c) $S=(-\infty, \log_{0,7}10]$. **3.** a) $S=[-1, 15]$; b) $S=(3, +\infty)$; c) $S=\left(-\infty, \dfrac{7}{13}\right)$. **4.** b) $S=(-\infty, -1)$; c) $S=(2, +\infty)$; d) $S=[0, +\infty)$; e) *Indicație*. Fie $2^x=t$, $t>0$; f) *Indicație*. Fie $3^x=t$, $t>0$; i) *Indicație*. Fie $8^x=t$, $t>0$. **5.** a) $S=(-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1, 2)$; b) *Indicație*. Fie $3^x=t$, $t>0$. Aplicați metoda intervalelor; c) *Indicație*. Împărțiți inecuația la $9^{|x|}$. **6.** a) $S=(-\infty, -1]\cup[2, +\infty)$; b) *Indicație*. Analizați cazurile $0<3x-1<1$ şi $3x-1>1$; c) *Indicație*. Analizați cazurile $0<|2x^2-7|<1$,

$|2x^2-7|=1$, $|2x^2-7|>1$. **9*.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=0$. *Indicație*. Rezolvați inecuația $2\cdot 4^{x+1}+a\cdot 2^{x+1}-a^2<0$ ca inecuație de gradul II față de 2^{x+1}, apoi analizați cazurile $a>0$ și $a<0$.

§5, 5.1. A. **2.** a) $0<\log_3 2<1$; b) $\log_3 0{,}2<0$; c) $0<\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5<1$; d) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}2<0$.
3. a), b), c) Primul număr mai mare.

§5, 5.1. B. **6.** $\log_{\sqrt{3}} 6>\log_3 5$. **7.** $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **8.** a) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_2 x+3$; b) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to(2,+\infty)$, $f^{-1}(x)=3^x+2$. **9.** a) $x\in(0;\,0{,}2)$; b) $x\in(13,+\infty)$. **10.** a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{R}\setminus(2,+\infty)$; c) $(-\infty,0)$. **11.** a) $2>\log_3 8$; b) $3>(\sqrt{13})^{-0,1}$; c) $5^{\frac{2}{3}}>17^{-0,3}$; d) $3^{0,1}>\log_9 7$. **12.** c) $(1,2)\searrow$, $(2,+\infty)\nearrow$, nici pară, nici impară, $E(f)=\mathbb{R}_+$, $y_{\min}=f(2)=0$. **13.** a) $(-2,+\infty)\setminus\{0,\pm1\}$; b) $(0,10^{-4})\cup(1,10)$; c) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\setminus\{\pm3\}$.

§5, 5.2. A. **1.** a) $S=\{16\}$; b) $S=\{1\}$; c) $S=\{100\}$; d) $S=\left\{3\frac{1}{3}\right\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; f) $S=\varnothing$. **2.** a) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; b) $S=\{-2\sqrt{2},\,2\sqrt{2}\}$; c) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{41}}{2},\,\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **3.** a) $S=\{-1,2\}$; b) $S=\{1-\sqrt{6},\,1+\sqrt{6}\}$; c) $S=\{1\}$. **4.** a) $S=\{1+10\cdot\sqrt[4]{500}\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$. **5.** a) $S=\{2,3\}$; b) $S=\left\{-1\frac{2}{3},\,79\right\}$; c) $S=\{10^{-4},10^{3}\}$.

§5, 5.2. B. **6.** b) $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{1}{4}\right\}$; c) $S=\{3^{-3-\sqrt{15}},\,3^{-3+\sqrt{15}}\}$; d) $S=\{-16\}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\{10^{2-\sqrt{6}},\,10^{2+\sqrt{6}}\}$; g) $S=\{4\}$; h) $S=\left\{\frac{\sqrt[3]{9}}{9},\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$; i) $S=\left\{\frac{1}{3},9\right\}$; j) $S=\{1,4\}$; k) $S=\{\pm4\}$. **7.** a) $x_1\approx0{,}7$, $x_2\approx7$; c) $S=\{2\}$. *Indicație*. Aplicați proprietățile funcțiilor ce reprezintă membrii respectivi ai ecuațiilor. **8.** c) $S=\{2\}$. **11*.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=1$, $S=\left\{\frac{1}{a},\,a^2\right\}$ pentru $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$; c) $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty,0]\cup\{1\}$, $S=\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2},\,\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$ pentru $a=10$. *Indicație*. Pentru $a\in(0,1)\cup(1,10)\cup(10,+\infty)$ rezolvați ecuația de gradul II $2x(2-x)=\lg a$.

§5, 5.3. B. **1.** a) $S=(-\infty,0)$; b) $S=[-3,3]$; c) $S=[1;\,1{,}5)$; d) $S=(-4,-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7},4)$; e) $S=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(2,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **2.** a) $S=\left(-\frac{1}{3},0\right]\cup[3,+\infty)$; b) $S=\left(1{,}6;\,\frac{5}{3}\right]$; c) $S=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. **3.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\left(2,\frac{13+\sqrt{193}}{12}\right)$. **4.** c) $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$. **5.** a) $S=(-\infty,-2)$; b) $S=(0,1)\cup[2,+\infty)$; d) $S=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$; f) *Indicație*. Treceți la logaritmi în baza 2; g) *Indicație*. În DVA al inecuației inițiale rezolvați inecuația $\log_{x+2}\frac{6}{10-x^2}<0$; i) *Indicație*. Fie $x^{\log_2 x}=t$; j) *Indicație*. Analizați cazurile $x^2-1>1$ și $0<x^2-1<1$. **6.** a) *Indicație*. Aplicînd metoda intervalelor, rezolvați în DVA inecuația $|x+5|\cdot|x-1|\ge x$; b) $S=(4,+\infty)$; d) *Indicație*. Analizați cazurile $|x|>1$ și $0<|x|<1$. **8*.** a) *Indicație*. DVA: $1-x^2>0$. Analizați cazurile $0<a<1$ și $a>1$;

b) $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty, 0]\cup\{1\}$, $S=\left(a, \frac{1}{a}\right)$ pentru $a\in(0, 1)$, $S=\left(0, \frac{1}{a}\right)\cup(a, +\infty)$ pentru $a\in(1, +\infty)$; c) *Indicație*. Analizați cazurile $0<a<1$ şi $a>1$. **9*.** $a\in(0, 1)$.

§5, 5.4. A. **1.** a) $S=\{(1, 2), (2, 1)\}$; b) $S=\{(2\log_5 9, 1)\}$; c) $S=\left\{\left(2, 5\frac{1}{3}\right)\right\}$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\{(7, 3)\}$; g) $S=\left\{\left(\frac{16}{9}, \frac{20}{9}\right)\right\}$; h) $S=\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$. **2.** a) $S=\left\{-\frac{9}{10}, 10^{10}-1\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{10}, 2, 3, 10\right\}$; c) $S=\{-3, 0\}$; d) $S=\{\sqrt[3]{2}, \log_5 2\}$.

§5, 5.4. B. **3.** a) $S=\{2, 1\}$; b) $S=\left\{\left(\frac{1}{81}, -3\right), (27, 4)\right\}$; c) $S=\{(5, 1), (5, -1)\}$; d) $S=\{(5; 1{,}5), (5^8; 0{,}5(5^8-0{,}25)\}$; e) $S=\{(27, 3), (3, 27)\}$; f) $S=\{(1, 7), (1, -9), (5, 3), (4, 4)\}$. **4.** a) $S=\{1, 2\}$; c) $S=\{\log_6 5, \log_5\sqrt{6}\}$; d) $S=\{5\}$.

Exerciții şi probleme recapitulative

A. **1.** a) 1) $x_0=-\sqrt{5}(2+\sqrt{3})$, 2) $[x_0, +\infty)$; b) 1) $x_0=-7(\sqrt{3}+2)$, 2) $(-\infty, x_0)$; c) 1) $x_0=\frac{51}{106}$, 2) $(x_0, +\infty)$. **2.** a) $f(t)=500+80t$; b) 18 luni. **3.** a) $f(x)=20+35x$; b) 142,5°C. **4.** a) $f(x)=23+0{,}18x$; b) 59 \$. **5.** a) $[1, +\infty)$; b) $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$. **6.** a) $(-\infty, -3)\cup(2, +\infty)$; b) $(-\infty, 2)$; c) $(-1, +\infty)$; d) $\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$. **7.** a) $t=0{,}25$ s; b) $t=1{,}5$ s. **8.** $f(t)=90-7{,}62t$ (cm), $\approx 11{,}8$ ore $=11$ ore 48 min. **9.** a), c) Al doilea număr mai mare; b), d), e), f) primul număr mai mare.

B. **10.** a) Al doilea număr mai mare; b), c), d), e) primul număr mai mare. **11.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{\sqrt{2}\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\frac{\sqrt[5]{21}}{3}\right\}$; f) $S=\varnothing$. **12.** a) $(-\infty, -1)$; b) $[0, 2)\cup(2, +\infty)$; c) $(-1, +\infty)$.

13. a) $x_1=1$, $x_2=3^{\frac{5}{6}}$, $x_3=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^5}$; b) $x_1=1$, $x_2=3^{\frac{5}{6}}$. **14.** *Indicație*. $\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2+R_3}$, $R_3=5\Omega$. **15.** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$. **16.** a) 20 u.l.; b) 24 u.l. **17.** $f(x)=-\frac{3}{800}(x-40)^2+18$. **18*.** a) $f^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; b) $f^{-1}: [-1, +\infty)\to[2, +\infty)$, $f^{-1}(x)=2+\sqrt{1+x}$.

Proba de evaluare II

A. **2.** 43 de ani, 9 ani. **3.** $S=\{1+\sqrt{2}\}$. **4.** $S=\{(4, 0)\}$.

B. **2.** $(x+1)^2+(y-3)^2=10$. **3.** $S=\{(2, 1)\}$. **4.** $S=(-\infty, -1]\cup\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)\cup\{1\}$. **5.** *Indicație*. Fie $6^{|x|}=t$, $t\geq 0$.

Modulul 8. Elemente de trigonometrie

§1. A. **1.** a) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{9}, \frac{11}{18}\pi$; b) $\frac{\pi}{3}, -\frac{13}{30}\pi, \frac{3}{2}\pi$. **2.** a) 60°, 90°, –135°; b) 30°, 108°, –360°. **3.** a) $\cos^2 15°$; b) $-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $5-2\sqrt{3}$; d) $4+\frac{\sqrt{3}}{6}$. **4.** a) Da; b) da; c) nu; d) nu. **5.** a) Nu; b) da; c) da; d) da. **6.** a) $\sin^2\alpha+\sin\alpha$; b) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$; c) -1; d) $\operatorname{ctg}\alpha$. **7.** a) 8 cm, 30°, 60°; b) 2 cm, 30°, 60°. **8.** 45°, 135°. **9.** ≈ 108 m.

§1. B. 10. a) $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; b) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$; c) $x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. **11.** Minus. **12.** a) 0; b) $\frac{1}{4}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{4}$. **13.** a) Minus; b) minus; c) minus. **14.** a) Nici pară, nici impară; b) pară; c) impară. **15*.** a) $[-3, 3]$; b) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; c) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

§2. A. 1. a) 1; b) –3; c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{2}$. **2.** a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; b) $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$. **3.** a) $\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4},\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$; d) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{2},\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **5.** a) 1; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0; d) $\cos\frac{17\pi}{70}$. **6.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **7.** a) $\sin^2\alpha$; d) $-\sin^2\alpha$; e) $\frac{2}{\sin\alpha}$; f) $2(\cos\alpha + \sin\alpha)$. **8.** a) $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; b) $\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; c) $\frac{1}{2}(1+3\cos 2\alpha)$.

§2. B. 9. *Indicaţie*. Aplicaţi relaţia $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 0{,}6^2$. **10.** *Indicaţie*. Aplicaţi relaţia $(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 = (2{,}5)^2$. **14.** a) $5\frac{1}{3}$; b) $\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)$; c) *Indicaţie*. $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. **15.** a) $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\alpha$; b) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. **16.** c), d) *Indicaţie*. Folosiţi relaţia $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

§3. B. 1. a) $S = \varnothing$; b) $S = \{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; c) $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $S = \left\{\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) $S = \varnothing$. **3.** a) $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}25 + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 5\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **4.** a) $S = \left\{\pm\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{6} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Indicaţie*. Împărţiţi ambii membri ai ecuaţiei la $\sqrt{2}$; f) *Indicaţie*. Împărţiţi ambii membri ai ecuaţiei la 2, apoi aplicaţi relaţia $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. a) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $S = \left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. a) $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) $S = \{\mathrm{arctg}3 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. a) $S = \left\{(-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $S = \left\{\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. a) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; c) *Indicaţie*. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$; d) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; i) *Indicaţie*. Împărţiţi ambii membri ai ecuaţiei la $\sqrt{2}$, apoi aplicaţi relaţia $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** a) $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}\right\}$. **10.** $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{7}{4}$. **11.** $\arcsin\frac{3}{7}$.

13. $\arcsin\frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}$. **14.** $2\arccos\frac{(l+m)\cdot b}{2lm}$. **16*.** a) Pentru $a = 0$, $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. *Indicaţie*. Pentru $a \neq 0$ examinaţi aparte cazurile $\Delta = 1 + 4a \geq 0$ şi $\Delta = 1 + 4a < 0$, ţinînd cont că

$|\sin x|\le 1$; d) *Indicaţie*. Rezolvaţi ecuaţia $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3a-1}{2}$, ţinînd cont de condiţia $\left|\frac{3a-1}{2}\right|\le 1$.

§4. B. 1. a) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$;

c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$;

f) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$; g) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$; h) $S=\mathbb{R}$;

i) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; j) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; k) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$;

l) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; m) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$; n) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$;

o) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$; p) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n,\ \pi-\operatorname{arcctg}3+\pi n)$; r) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi+2\pi n,\ 2\pi n]$;

s) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

2. a) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+4\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+4\pi n\right]$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ \frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right]$; c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi n}{5},\ \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}\right)$;

d) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi n}{3}\right)$; e) $S=\mathbb{R}$.

3. a) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$; c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)$.

d) *Indicaţie*. Rezolvaţi inecuaţia $\sin 3x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e*) *Indicaţie*. Introduceţi necunoscuta auxiliară $t=|\cos x|$; f*) *Indicaţie*. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. **4.** *Indicaţie*. $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. **5.** *Indicaţie*. Scrieţi ecuaţia astfel: $(\sin x-\sin 3x)(\sin x+\sin 3x)+\sin^2 2x=0$, apoi transformaţi în produs expresiile din paranteze.

Exerciţii şi probleme recapitulative

A. 1. a) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{1}{4}$. **2.** a) –0,28; b) 0,68. **3.** a) –3; b) 0. **4.** $2{,}4\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\approx 4{,}63$ m. **5.** $(20-10\sqrt{3})$ cm. **6.** $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$. **8.** b) $\cos\alpha$. **9.** a) 1; b) 1. **11.** 5°; 150°; 720°; 1500°.

B. 12. c) –3; d) 9. **13.** 18. **14.** 25. **15.** $k=\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **16.** Mai mică decît 1. **17.** a) Plus; b) plus. **18.** a) Nici pară, nici impară; b) impară. **19.** a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$. **20.** *Indicaţie*. Utilizaţi $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=m^2$. a) $m^2=2m$; b) $m(m^2-2m-1)$. **21.** a) A; b) F. **23.** a) 1; b) 0. **25.** –330°. **26.** $S=\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$. **30.** 2 cazuri: 1) $\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului alăturat bazei, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului de la vîrf; 2) $\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului alăturat bazei, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului de la vîrf.

33. b) $\cos(\angle ADB)=\frac{13}{14}$, $\sin(\angle ADB)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\operatorname{tg}(\angle ADB)=\frac{3\sqrt{3}}{13}$, $\operatorname{ctg}(\angle ADB)=\frac{13\sqrt{3}}{9}$;
e) $\mathscr{A}=\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$; f) $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **34*.** a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; b) 0,8.
35*. a) $S=\left\{\pi-\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}-\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}+\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$;
b) $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$. **36*.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Probă de evaluare

A. **1.** D. **2.** $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$, $\frac{2+\sqrt{15}}{6}$, $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{15}-2}$, $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{15}+2}$. **4.** 2. **5.** $\frac{1}{2}$.
6. $\arcsin\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

B. **1.** F. **2.** $-0{,}96$; $0{,}28$; $-3\frac{3}{7}$; $-\frac{7}{24}$. **4.** $S=\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Modulul 9. Figuri geometrice în plan

§1. A. **4.** a), b), c) A; d) F.

§1. B. **10.** a) $1)\Rightarrow 2)$ (F), $1)\Rightarrow 3)$ (A), $1)\Rightarrow 4)$ (A); b) $2)\Rightarrow 1)$ (F), $3)\Rightarrow 1)$ (A), $4)\Rightarrow 1)$ (F).
11. a) $a\cap b=\{A\}$, $a\cap P=a$, $b\cup P=P$; b) P, $\{A\}$.

§2. A. **1.** 12 cm. **2.** 8 cm. **3.** 30 cm. **4.** 100 cm. **5.** 16 cm, 12 cm. **6.** 18 cm, 18 cm, 20 cm. **7.** 3 cm.
9. $EF=FD=3$ cm.

§2. B. **10.** *Indicație*. Aplicați criteriul IU. **11.** *Indicație*. Aplicați criteriul ULU. **12.** *Indicație*. Aplicați criteriul LUL. **13.** *Indicație*. Aplicați criteriul IC. **14.** *Indicație*. Aplicați criteriul IU. **15.** *Indicație*. Aplicați criteriul LUL. **16.** a) *Indicație*. Pe $[AM$ şi $[A_1M_1$ luați punctele D şi D_1, astfel încît $AM=MD$ şi $A_1M_1=M_1D_1$. Din $\Delta AMC\equiv\Delta MBD$ şi $\Delta A_1M_1C_1\equiv\Delta M_1B_1D_1$ rezultă că $\angle ABD\equiv\angle A_1B_1D_1 \overset{\text{(LUL)}}{\Rightarrow} \Delta ABD\equiv\Delta A_1B_1D_1$; b) $\Delta ALC \overset{\text{(ULU)}}{\equiv} \Delta A_1L_1C_1$. **17.** $\Delta ABM \overset{\text{(LLL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1M_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ABC\equiv\angle A_1B_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \overset{\text{(LUL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **18.** *Indicație*. Pe $[AM$ şi $[A_1M_1$ luați punctele D şi respectiv D_1, astfel încît $AM=MD$ şi $A_1M_1=M_1D_1$. $\Delta ABD \overset{\text{(LLL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1D_1 \Rightarrow \angle BAM\equiv\angle B_1A_1M_1$, iar $\Delta ADC \overset{\text{(LLL)}}{\equiv} \Delta A_1D_1C_1 \Rightarrow \angle MAC\equiv\angle M_1A_1C_1$. Astfel, $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \overset{\text{(LUL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **19.** *Indicație*. $\Delta AMC \overset{\text{(LUL)}}{\equiv} \Delta A_1M_1C_1 \Rightarrow AC=A_1C_1$; $\Delta AMB\equiv\Delta A_1M_1B_1 \Rightarrow AB=A_1B_1$. Deci, $\Delta ABC \overset{\text{(LLL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **20.** *Indicație*. Pe mediana AM luați un punct D, astfel încît $AM=MD$. $\Delta BMD\equiv\Delta AMC\Rightarrow BD=AC$, iar în ΔABD avem $AB+BD>AD$ sau $AB+AC>2AM$. **21.** *Indicație*. Din problema 20 rezultă că $2m_a<b+c$, $2m_b<a+c$, $2m_c<a+b$. Adunînd aceste inegalități, obținem $m_a+m_b+m_c<\mathscr{P}$. Adunînd inegalitățile $m_a>c-\frac{a}{2}$, $m_b>a-\frac{b}{2}$, $m_c>b-\frac{c}{2}$, obținem $m_a+m_b+m_c>\frac{1}{2}\mathscr{P}$. **22.** *Indicație*. Vezi problema 18. **23.** *Indicație*. $\Delta ABL \overset{\text{(LUL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1L_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ALC\equiv\angle A_1L_1C_1 \Rightarrow \Delta ALC \overset{\text{(ULU)}}{\equiv} \Delta A_1L_1C_1 \Rightarrow AC=A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \overset{\text{(LUL)}}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **24.** $\frac{2\mathscr{P}_1-\mathscr{P}}{2}$.
25. 15 cm, 20 cm, 25 cm. **26.** c) *Indicație*. Construiți $\angle MAN\equiv\angle A$ şi punctul $C\in[AM$, astfel încît $AC=b$. $\mathscr{C}(C,a)\cap[AN=\{B\}$. Triunghiul ABC este cel căutat. **28.** g) $\{A\}=CM\cap BN$, unde $\angle BCM\equiv\angle CBN$. **29.** *Indicație*. Pe $[AM$ luați punctul D, astfel încît $AM=MD$. În ΔACD avem

$AD = 2m_a$, $\angle ADC \equiv \angle BAM$, deci ΔACD poate fi construit (ULU). Vîrful $B \in [CM$, astfel încît $CM = MB$. **30.** b) *Indicație*. În ΔABC avem $BC = a$, $AD = h_a$, $AM = m_a$. ΔADM poate fi construit ca dreptunghic (IC). Vîrfurile B şi C sînt punctele de intersecție a cercului $\mathscr{C}\left(M, \frac{a}{2}\right)$ cu dreapta DM; d) *Indicație*. În ΔABC avem $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Luați punctul $D \in [BA$, astfel încît $AD = AC$. Deci, ΔCBD poate fi construit (LUL). Vîrful A este intersecția BD cu mediatoarea segmentului DC; e) *Indicație*. În ΔABC luați punctul $D \in AC$, astfel încît $AD = AB = c$. ΔBDC poate fi construit (LUL). $DC = b - c$, $BC = a$, $\angle BDD \equiv \angle C$. ΔABD este isoscel; f) *Indicație*. În ΔABC luați punctul $D \in [CA$, astfel încît $AD = AB = c$. $m(\angle ADB) = \frac{1}{2}m(\angle A)$, deci ΔDCB poate fi construit. Vîrful A este intersecția CD cu mediatoarea segmentului BD; g) *Indicație*. În ΔABC, pe complementara semidreptei $[BA$ luați punctul B_1, astfel încît $CB = BB_1$, iar pe complementara semidreptei $[AB$ luați punctul A_1, astfel încît $AC = A_1A$. Triunghiul CA_1B_1 poate fi construit, deoarece $m(\angle CA_1B_1) = \frac{1}{2}m(\angle A)$, $m(\angle CB_1A_1) = \frac{1}{2}m(\angle B)$ şi $A_1B_1 = a + b + c$ (ULU). Vîrfurile A şi B sînt intersecțiile mediatoarelor segmentelor A_1C şi B_1C cu dreapta A_1B_1; h) *Indicație*. În ΔABC luați punctul $D \in AC$, astfel încît $AB = AD \Rightarrow DC = b - c$. Demonstrați că $2m(\angle CBD) = = m(\angle B - \angle C)$, de unde rezultă că ΔBDC poate fi construit. Vîrful A se determină din ΔABD, care este isoscel.

§3. A. **1.** 44 cm. **2.** 12 cm. **3.** 50°, 130°. **4.** 70°, 110°. **5.** 40°, 50°. **6.** 20°, 70°. **7.** 75°, 105°. **8.** 24 cm, 40 cm. **9.** 56 cm, 84 cm. **10.** 20 cm.

§3. B. **11.** $\angle DAE \equiv \angle AEB$ ca unghiuri alterne interne. **12.** *Indicație*. Prin vîrfurile unghiurilor ascuțite construiți drepte paralele cu catetele şi veți obține un dreptunghi. **13.** *Indicație*. Fie mediana $CM = 0{,}5AB$. Atunci triunghiurile CMA şi BMC sînt isoscele. Prin urmare, $m(\angle MAC) = m(\angle ACM) = \alpha$, $m(\angle MBC) = m(\angle MCB) = \beta$. Atunci $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow m(\angle ACB) = 90°$. **14.** *Indicație*. Folosiți rezolvarea problemei 11. **15.** *Indicație*. Dacă se construiesc înălțimile din vîrfurile unghiurilor obtuze, atunci se obțin două triunghiuri congruente. **16.** $d_1 + d_2$. **17.** 1 : 6. **18.** *Indicație*. Construiți un unghi congruent cu cel dat, precum şi bisectoarea lui. Pe bisectoare luați un segment congruent cu cel dat şi construiți drepte paralele cu laturile rombului. **19.** *Indicație*. Construiți rombul $AMNL$ cu $\angle MAL$ congruent cu cel dat. Pe $[AN$ luați punctul Q, astfel încît $AN + NQ = AN + ML$. Pe $[AN$ luați punctul C, astfel încît $AC = d_1 + d_2$. Prin C construiți o paralelă cu MQ şi determinați vîrful al treilea. **20.** *Indicație*. Aplicați criteriul LLL. **21.** *Indicație*. Aplicați criteriul LLL. **24.** *Indicație*. Construiți ΔABE cu $AE = a - b$, $\angle BAE \equiv \angle A$, $\angle AEB \equiv \angle D$. Pe $[AE$ luați punctul D, astfel încît $AD = a$. Vîrful C este intersecția paralelei cu AD, duse prin B, şi a paralelei cu BE, duse prin D. **25.** *Indicație*. Construiți ΔBED cu $BE = h$, $BD = d_1$ $m(\angle BED) = 90°$, apoi $[BM \parallel DE$. Vîrfurile C şi A sînt intersecțiile cercului $\mathscr{C}\left(O, \frac{1}{2}d_2\right)$ cu semidreptele $[BM$ şi $[DA$, unde O este mijlocul lui $[BD]$. **26.** *Indicație*. Vezi problema 25.

§4. A. **1.** 2 cm. **2.** 36 cm, 9 cm. **3.** 30 cm, 40 cm, 50 cm. **4.** 6 cm. **5.** 30 cm, 36 cm. **6.** 7,2 m.

§4. B. **7.** *Indicație*. $2m(\angle B) = \pi - m(\angle A) = \pi - m(\angle A_1) = 2m(\angle B_1)$. Aplicați criteriul ULU. **9.** *Indicație*. $\Delta ABM \overset{(LUL)}{\sim} \Delta A_1B_1M_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1M_1 : AM$. **10.** *Indicație*. $\Delta ABL \overset{(ULU)}{\sim} \Delta A_1B_1L_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1L_1 : AL$. **11.** $AE \cdot BE = CE \cdot DE \Rightarrow AE : CE = DE : BE \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta CBE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAE \equiv \angle BCE \Rightarrow BC \parallel AD.$ **12.** *Indicație.* $\Delta BHA_1 \sim \Delta AHB_1 \Rightarrow AH : BH = B_1H : A_1H \Rightarrow$ $\Rightarrow AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ etc. **13.** *Indicație.* Fie trapezul $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, $\{O\} = AC \cap BD$, M – mijlocul laturii BC şi $\{N\} = AD \cap MO$, atunci $AN : ND = BM : MC = 1 \Rightarrow AN = ND$. Deci, $M, O,$ N sînt puncte coliniare. Dacă $\{O_1\} = AB \cap CD$, atunci $BM : MC = AN : ND$, deci punctele O_1, M_1, N sînt coliniare. **14.** *Indicație.* În ΔBLM, $\angle BLM$ este obtuz, iar $\angle BML$ – ascuțit. Atunci $BL < BM$. **15.** $\Delta BMC \sim \Delta AMD$. **16.** 12 cm, 24 cm, 30 cm. **17.** $AC = 48$ cm, $A_1C_1 = 36$ cm, $B_1C_1 = 30$ cm. **18.** 56 cm. **19.** 9 cm. **20.** *Indicație.* Pe laturile unui unghi congruent cu $\angle A$ construiți punctele A_1 şi B_1, astfel încît $AC_1 : AB_1 = m : n$. Pe $[AC_1$ construiți $AC = b$, apoi $CD \parallel C_1B_1$. Punctul $\{B\} = [AB_1 \cap CD$. **21.** *Indicație.* Construiți $\Delta A_1B_1C_1$ cu $\angle B_1A_1C_1 = \angle A$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle C$ şi $[B_1D_1]$ – înălțimea lui. Pe $[A_1C_1$ luați punctul $E_1 \notin [A_1C_1]$, astfel încît $C_1E_1 = B_1D_1$. Pe $[A_1C_1$ luați punctul E, astfel încît $A_1E = b + h_b$ şi construiți $[ED \parallel B_1E_1$, $\{B\} = [ED \cap AB_1$ şi $B_1C_1 \parallel BC$. **22.** *Indicație.* Construiți un pătrat $M_1N_1P_1Q_1$, astfel încît $N_1 \in AB$, $M_1 \in AC$, $Q_1 \in AC$. Punctul $\{P\} = [AP_1 \cap BC$ este un vîrf al pătratului. **23.** *Indicație.* Vezi problema 21.

§5. A. **1.** $2\sqrt{5}$ cm. **2.** 13 cm. **3.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm. **4.** $8\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm. **5.** 42 cm, 56 cm. **6.** $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm, 5 cm. **7.** 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm, 10 cm. **8.** $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm. **9.** 24 cm.

§5. B. **10.** 10 cm. **11.** 1 cm. **12.** 30°, 60°, 90°. **13.** 3 cm, 4 cm, 5 cm, 1 cm. **14.** 11 : 7. **16.** 0,4R. **17.** 8 cm.

Proba de evaluare I

A. **1.** 400×300 m. **2.** 4,8 m. **3.** 144,3 mm. **4.** $AB = 12$ cm, $BC = 15$ cm. **5.** $AB = 1{,}5$ m, $CD = 2$ m, $EF = 2{,}5$ m.

B. **1.** $\frac{d\sqrt{13}}{12}$. **2.** $a(\sqrt{2} - 1)$. **3.** 40 de discuri, 44 de discuri. **4.** Doar piese pătrate.

§6, 6.1. A. **1.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm. **2.** 3 cm, 7,5 cm. **3.** 60°, 30°. **4.** $2\sqrt{13}$ cm şi $3\sqrt{13}$ cm. **5.** $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ cm. **6.** 8 cm, 15 cm. **7.** 15 cm, 9 cm.

§6, 6.1. B. **8.** $\sqrt{5}$ cm. **9.** 18 cm, 24 cm, 30 cm. **10.** $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. **11.** $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. **13.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. **14.** 5,6 cm, 4,2 cm; $r = 2{,}4$ cm. **15.** $\sqrt{2}$ m, $\sqrt{3}$ m. **16.** $\frac{n^2+m^2}{n}$, $\frac{n^2+m^2}{m}$.

§6, 6.2. B. **1.** 4 cm. **2.** $25\sqrt{3}$ cm^2. **3.** 4 m sau $\sqrt{10}$ m. **4.** $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$. **5.** $\frac{9}{4}$ m, $\frac{15}{4}$ m. **6.** 5 cm. **7.** $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$. **8.** 10 cm, 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm. **9.** 3 cm, 5 cm, 7 cm. **10.** $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **11.** $\frac{5\sqrt{29}}{4}$ cm.

§6, 6.3. A. **1.** 40 cm. **2.** 12 cm. **3.** 18 cm. **4.** 50°. **5.** 16 cm. **6.** 40°.

§6, 6.3. B. **7.** *Indicație.* Mijlocul ipotenuzei este centrul cercului circumscris unui triunghi. **8.** *Indicație.* $\mathrm{m}(\angle CBD) = \pi - \mathrm{m}(\angle BDA) - \mathrm{m}(\angle BCA)$. Unghiurile BDA şi BCA sînt înscrise în cerc şi subîntind arce care nu depind de dreapta CD. **9.** *Indicație.* Se consideră două triunghiuri isoscele asemenea cu vîrfurile în centrele cercurilor. **10.** *Indicație.* $\angle BCA \equiv \angle ADE$. **11.** *Indicație.* Fie T punctul de tangență. Atunci $CC_1 = C_1T$ şi $BB_1 = B_1T$, de unde $AC_1 + C_1B_1 + B_1A =$ $= AC_1 + C_1T_1 + TB_1 + B_1A = AC_1 + C_1C + BB_1 + B_1A = AC + AB = 2AB$.

12. a) *Indicație.* $\mathrm{m}(\angle AA_1B) = \mathrm{m}(\angle AB_1B)$; b) *Indicație.* Din a) obținem că $\mathrm{m}(\angle A_1B_1C) = \mathrm{m}(\angle CBA)$. $\angle CBA$ este congruent cu unghiul format de AC şi tangenta la cerc în vîrful C. Deci, tangenta este paralelă cu A_1B_1. Atunci $OC \perp A_1B_1$. **13.** *Indicaţie*. Tangenta comună în A trece prin mijlocul segmentului BC. **14.** *Indicaţie*. Vezi problema 12 b). **15.** *Indicaţie*. $CE^2 = CA \cdot CB = CD^2$. **16.** $2\arcsin\frac{R-r}{R+r}$. **17.** $\frac{1}{2}(b-a)$. **18.** $2\sqrt{R \cdot r}$. **19.** *Indicaţie*. Construiţi dreapta CB, astfel încît $m(\angle ABC) = \varphi$, apoi dreapta $BD \perp CB$. Intersecţia mediatoarei segmentului AB cu BD este punctul O. Mulţimea cerută este unul din arcele cercului $\mathscr{C}(O, OB)$, precum şi arcul simetric acestuia. **20.** *Indicaţie*. Construiţi mulţimea punctelor M, astfel încît $\angle BMC \equiv \angle A$ (vezi problema 19). Atunci punctul de intersecţie a arcului şi a dreptei paralele cu BC (distanţa dintre ele fiind h_a) este vîrful al treilea. **21.** *Indicaţie*. Construiţi în cercul $\mathscr{C}(O, R)$ coarda $BC = a$. Vîrful al treilea este intersecţia cercului $\mathscr{C}(O, R)$ şi a paralelei cu BC, distanţa dintre ele fiind h_a. **22.** *Indicaţie*. Vezi problema rezolvată 2. **23.** *Indicaţie*. Dacă I este centrul cercului înscris, atunci $m(\angle BIC) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}m(\angle A)$. **24.** *Indicaţie*. $[AC]$, $[BC]$ sînt coardele cercului $\mathscr{C}(O, R)$.

§7. A. **1.** a) 12 laturi; b) 18 laturi. **2.** a) 10 laturi; b) 15 laturi. **3.** $0{,}5R$. **4.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§7. B. **5.** $R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$, $r = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$. **6.** $3\sqrt{3}$ m, $4\sqrt{2}$ m, 6 m, $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m, $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m. **7.** $\dfrac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$ m². **8.** $2\sqrt{6}$ m.

§8. A. **1.** 600 cm². **2.** 60 cm². **3.** 12 cm². **4.** 60 cm². **5.** 157,5 cm². **6.** 144 cm². **7.** 4π cm².

§8. B. **8.** $\dfrac{d^2-4a^2}{4}$. **9.** $5\sqrt{35}$ cm². **10.** $\frac{9}{4}$ m², $\frac{15}{4}$ m². **11.** $20\sqrt{21}$ m². **12.** $18\sqrt{3}$ cm². **13.** $\frac{ab}{4}$. **14.** $\mathscr{A}_{ABE} = 2$ u.p., $\mathscr{A}_{\Delta AED} = 4$ u.p. **15.** $\frac{3d^2}{4}$. **16.** 3,6 dm².

Probleme recapitulative

A. **1.** 840 cm². **2.** 15. **3.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. **4.** $\sqrt{10}$ cm. **5.** $\sqrt{2}-1$. **6.** $\frac{136\sqrt{2}}{5}$ cm. **7.** 60°, 120°. **8.** 7,5 cm. **9.** 4 : 1. **10.** 150°. **11.** 12 cm. **12.** 3 cm. **13.** 8 cm. **14.** 28 cm². **15.** 24 cm. **16.** 7 cm. **17.** $\sqrt{114}$ cm.

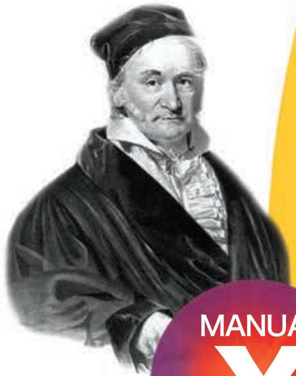
B. **18.** 0,5 cm. **19.** $\frac{25}{3}$ cm. **20.** 25 cm, 25 cm, 30 cm. **21.** 2,4 cm, 5,6 cm, 4,2 cm, 7 cm. **22.** $r(2R+r)$. **23.** 5 cm. **24.** 3 : 4. **25.** 5 cm, 5 cm, 6 cm. **26.** $\frac{9a}{4}$. **27.** 73 : 70. **28.** 30°, 30°, 120° sau 75°, 75°, 30°. **29.** $\frac{a-b}{2}$. **30.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **31.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. **32.** 30°, 60°. **33.** $BC : AC : AB = 5 : 10 : 13$. **34.** Triunghiurile dreptunghice isoscele cu catetele $\sqrt{2\mathscr{A}}$. **35.** Triunghiurile isoscele cu unghiul de la vîrf α. **36.** a) $\approx 9{,}42$ mm; b) $\approx 226{,}08$ mm. **37.** a) $\approx 18{,}84$ dm; b) $\approx 226{,}08$ dm; c) $\approx 452{,}16$ dm. **38.** ≈ 5 min. şi 1,44 s. **39.** $\approx 7{,}536$ m.

Proba de evaluare II

A. **1.** 6π cm². **2.** *Indicaţie*. Sînt trei vîrfuri posibile. **3.** $(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm. **4.** 90°. **5.** 30 cm, $15\sqrt{21}$ cm. **6.** 288 cm².

B. **1.** $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ cm². **2.** $18\sqrt{3}$ cm². **3.** 84 u.p. **4.** *Indicaţie*. Demonstraţi că această mărime este egală cu înălţumea triunghiului. **5.** 4 cm, $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ cm. **6.** $\frac{R^2}{12}(7\pi+6+3\sqrt{3})$ (u.p.).

Cuprins



MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA X

Editura PRUT INTERNAȚIONAL

ISBN 978-9975-54-043-8

EDIȚIE COMERCIALĂ